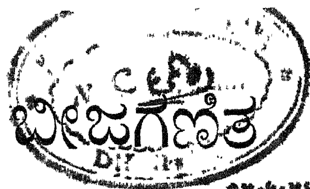


ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

ಎರಡನೆಯ ಭಾಗ

ಲೇಖಕರು

ಪಾಂ. ಶ್ರೀ. ಕಟ್ಟಿ, ಎಮ್. ಎ. (ಕೆಂಟಬ್),

ಮಾಜೀ ಸೀನಿಅರ್ ಸ್ಕಾಲರ್, ಟ್ರನಿಟಿ ಕಾಲೇಜ, ಕೇಂಬ್ರಿಜ್,
ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಎಲ್‌ಫಿನ್‌ಸ್ಟನ್ ಕಾಲೇಜ, ಮುಂಬಯಿ,
ಮತ್ತು ಮಾಜೀ ಪ್ರಧಾನ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕಂಡರಿ ಟ್ರೇನಿಂಗ ಕಾಲೇಜ, ಬೆಳಗಾಂವಿ,

ಮತ್ತು

ವಾ. ಪಾಂ. ಖಾನೋಲಕರ, ಎಮ್. ಎ. (ಲಂಡನ್),

ಶಿಕ್ಷಣಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕಂಡರಿ ಟ್ರೇನಿಂಗ ಕಾಲೇಜ, ಬೆಳಗಾಂವಿ
ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಇಂಡಿಯನ್ ಇನ್‌ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್
ಎಜ್ಯುಕೇಶನ್, ಮುಂಬಯಿ.



ಓರಿಎಂಟ ಲಾಂಗಮನ್ಸ ಲಿಮಿಟೆಡ್

ಮುಂಬಯಿ ಕಲಕತ್ತಾ ಮದ್ರಾಸ

ORIENT LONGMANS LTD.
17 CHITTARANJAN AVENUE, CALCUTTA 13
NICOL ROAD, BALLARD ESTATE, BOMBAY 1
36-A MOUNT ROAD, MADRAS 2
17 NAZIMUDDIN ROAD, DACCA

LONGMANS, GREEN AND CO. LTD.
6 & 7 CLIFFORD STREET, LONDON W.1
531 LITTLE COLLINS STREET, MELBOURNE C.1
BOSTON HOUSE, STRAND STREET, CAPE TOWN

LONGMANS, GREEN AND CO. INC.
55 FIFTH AVENUE, NEW YORK 3

LONGMANS, GREEN AND CO.
215 VICTORIA STREET, TORONTO 1

First Published May 1953

Price Rs. 2.

PRINTED IN INDIA

by M. R. Sirur at the Sirur Printing Press, Khetwadi 12th Lane, Girgaum, Bombay 4 and published by N. B. Cooper, Manager, Orient Longmans Ltd., Nicol Road, Ballard Estate, Bombay 1.

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತದ ಈ ಎರಡನೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಇಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲು ನಮಗೆ ಬಹಳ ಆನಂದವಾಗುತ್ತಿದೆ. ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಇದನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದ್ದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅದರಲ್ಲಿಯ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು ಅತಿ ಸುಲಭವಾಗುವಂತೆ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ-ವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಭೂತವಾದ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ವಿವೇಚಿಸಲಾಗಿದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಷಯದ ಮೇಲಿನ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿಯೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಬುದ್ಧಿಯನ್ನು ಒರೆಗೆ ಹಚ್ಚಿ ನೋಡುವ ಉದಾ-ಹರಣೆಗಳ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಬಹಳಷ್ಟು ಸಂಗ್ರಹಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ವಿಶೇಷ ಆಯಾಸವಿಲ್ಲದೆ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವಂಥವು ಇವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಹಾಗೆಯೇ ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಆಗ್ರಹದ ಸೂಚನೆಯು ಇದೆ.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಈ ವಿಷಯವು ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ತೋರಿಕೆಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಗಡುಚೆನಿಸುವದು. ಪ್ರಸ್ತುತ ಭಾಗದ ಎರಡು ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭರೀತಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ವಿವೇಚಿಸಲಾಗಿದ್ದು ಅತಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ ಕೂಡ ಆ ವಿಷಯವು ಸಹಜವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದಾದ ರೀತಿ-ಯಲ್ಲಿ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಗತಿಯ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಎಷ್ಟೋ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸುಮ್ಮಸುಮ್ಮನೆ ಗೊಂದಲ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆಂದು ಅನುಭವವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಇಡೀ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ಆದೇ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ವಹಿಸಿ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳ ಸವಿಸ್ತಾರ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಅಂಥ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕ-ಗಳನ್ನು ಹೇಳುವದು ಎಷ್ಟು ಸುಲಭವಾದ ಸಂಗತಿಯಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ-ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವಿಷಯದ ಅಂಗ ಉಪಾಂಗಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳು-ವಂಥ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕದ ಎಲ್ಲ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೌದ್ಧಿಕ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವಂಥ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ-ಯೆಂದು ಮೇಲ್ಮೇಲೆ ನೋಡಿದರೂ ತಿಳಿದುಬರುವದು. ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯು ಎಷ್ಟು ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅಜಮಾಸು

ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕು, ತಿಳಿಯದೇ ಇದ್ದ ಭಾಗಗಳು ಯಾವವು ಎಂದು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರಬೇಕು ಮತ್ತು ವಿಷಯದ ಪುನರಾವಲೋಕನೆಯೂ ಆಗಬೇಕು, ಎಂಬ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದಂತೆಯೇ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಕೊನೆ-ಯಲ್ಲಿ ಹನ್ನೆರಡು ಪರೀಕ್ಷಾತ್ಮಕ ಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಆಗ್ರಹದ ಸೂಚನೆಯು ಇದೆ.

ಆಧುನಿಕ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯ ತತ್ವಗಳ ಮತ್ತು ಪದ್ಧತಿಗಳ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯೋಗವು ಮಾನವರ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ತರಹದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವಿಪುಲವಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲರಿಗೆ ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ. ಅನೇಕ ಪ್ರಯೋ-ಗಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘವಾದ ಪರಿಶ್ರಮದಿಂದ ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆದ ಮತ್ತು ಅನುಭವದ ಒರೆಗಲ್ಲಿಗೆ ಹಚ್ಚಿ ನೋಡಿದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ನಿಯಮಗ-ಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಅತಿ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಪರಿಭಾಷೆಯೆಂದರೆಯೇ ಬೈಜಿಕ ಸೂತ್ರಗಳು. ಪದಾರ್ಥವಿಜ್ಞಾನಶಾಸ್ತ್ರ, ಯಂತ್ರಶಾಸ್ತ್ರ, ವಿದ್ಯುಚ್ಛಾಸ್ತ್ರ, ಸ್ಥಾಪತ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ, ನೌಕಾನಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ವೈಮಾನಿಕಶಾಸ್ತ್ರ, ಮೊದಲಾದ ಆಧುನಿಕ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಗತಿಹೊಂದಿದ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ವಿವಿಧ ಕಲೆಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶಿಲ್ಪಿಗೂ ಕೂಡ ಸೌಕರ್ಯ-ದಿಂದ ಸಹಜವಾಗಿ ಮತ್ತು ತಪ್ಪದಂತೆ ಬೈಜಿಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು ಅವಶ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಷ್ಟು ಮಾಡಲು ಬರುವಷ್ಟಾದರು ಬೀಜ-ಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸವು ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತಿರುವಾಗ ಪೃಥವಾಗಬೇಕು. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಹಿರಿಯರು ಹೇಳಿದ್ದೇ ಪ್ರಮಾಣವು ಎಂದಾಗಲೀ ಇಲ್ಲವೆ ಶ್ರೇಷ್ಠರು ಹಾಗೆ ಹೇಳುತ್ತಾರೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೆ ಹೇಳಲಾಗಿದೆಯೆಂದಾಗಲೀ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಮಾಣವೆಂದು ಮನ್ನಿಸದೆ ಇಲ್ಲವೆ ಆದೊಂದು ತೊಕತಾಳಿಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂದು ಅವರು ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳದೆ ಅವುಗಳ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸತ್ಯತೆಯು ಅವರಿಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗುವದು ಅತ್ಯವಶ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆದರವೆನಿಸಬೇಕು, ಮತ್ತು ಆ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಅವರ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರೀತಿಯು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಬೇಕು. ಈ ಮುಖ್ಯ ಹೇತುವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೊಸ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡುವ ಅನೇಕ ಪ್ರಕಾರಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವರಿಗೆ ಮನಗಾಣಿಸಿ ಕೊಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಪುಸ್ತಕದ ವಿಸ್ತಾರವು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೆಳೆದಿದ್ದರೂ ಅತ್ತ ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಡದೆ ಕೇವಲ ವಿಷಯ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಸುಬೋಧವಾಗಿ ಮಾಡು-

ವದರ ಕಡೆಗೇ ಎಲ್ಲ ಲಕ್ಷ್ಯವನ್ನು ಪೂರೈಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಉದ್ದೇಶವೆಂದರೆ ಅಂಕ-ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಬುದ್ಧಿಯು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ನಡೆಯುವದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಪ್ಪು ತಿಳುವಳಿಕೆ-ಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಕೂಡ ಬೀಜಗಣಿತ ಈ ವಿಷಯವು ಅತಿ ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಮನೋರಂಜಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಅವರಿಗೆ ಎನಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಅವರ ದೃಢವಾದ ಮತವು ಆಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅವರು ಸಂತೋಷದಿಂದ ಆ ವಿಷಯದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರವೃತ್ತರಾಗಿ ಅವರಿಗೆ ಆ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಬರಬೇಕು, ಅವರ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸವು ಜಾಗೃತವಾಗ-ಬೇಕು. ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ಜನರಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಕಠಿಣವಾದ ಶಾಸ್ತ್ರವಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಯ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ಅದರ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವದು ಕಠಿಣವಾಗುತ್ತದೆಂಬ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ಅಷ್ಟೊಂದು ನಿಜವಲ್ಲ, ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಭಾಗವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಗೂ ಗಮ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಅವರ ಮನವರಿಕೆಯಾಗ-ಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ರೂಢ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬಾರದಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬೈಜಿಕ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ಆಯಾಸವಿಲ್ಲದೇ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು ಎಂಬುದು ಅವರಿಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಕಂಡುಬರಬೇಕು, ಮತ್ತು ಆ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಅರಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅವರು ಸಿದ್ಧರಾಗಬೇಕೆಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಎಲ್ಲ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡ-ಲಾಗಿದೆ.

ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ದೋಷವಿಲ್ಲದಂತೆ ಮಾಡಲು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಪ್ರಯತ್ನಮಾಡಲಾಗಿದೆ; ಆದರೆ ಹಾಗೆ ಎಚ್ಚರಿಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ತಪ್ಪುಗಳು ಉಳಿದು ಬಿಟ್ಟಿರುವವು. ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಬಂಧುಭಗಿನಿಯರಿಗೂ ತಪ್ಪುಗಳೂ ಕೊರತೆಗಳೂ ಇನ್ನೂ ಕಂಡುಬಂದರೆ ಅವರು ತಿಳಿಸಬೇಕು ಎಂದು ವಿನಂತಿ ಇದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಪುಸ್ತಕದ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವಾಗಬೇಕು ಎಂಬ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಕೆಲವು ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಆಭಾರಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಮತ್ತು ಕೃತಜ್ಞತೆಯಿಂದ ಸ್ವೀಕರಿಸ-ಲಾಗುವದು, ಮತ್ತು ಪ್ರಕಾಶನದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ವ್ಯವಹಾರ್ಯವಿದ್ದವುಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಂಸ್ಕರಣದ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಒಳಪಡಿಸಲಾಗುವದು. ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪತ್ರ-ವ್ಯವಹಾರವನ್ನು ವಾ. ಷಾಂ. ಖಾನೋಲಕರ ಇವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಾಶಕರ ವಿಳಾಸಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು.

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

ಕೆಲವು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು.

ಅವಯವ, ಗುಣ, ಗುಣಕ = Factor

ಉತ್ಥಾಪನ ರೀತಿ = Method of Substitution.

ಏಕವರ್ಣ ದ್ವಿಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳು = Quadratic Equations

ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರ, ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸ = Cross Multiplication

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ = Factorisation

ತುಲನೆ ರೀತಿ = Method of Comparison

ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿ = Trinomial Expression of second degree.

ನಿಶ್ಚಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ನಿತ್ಯ-ಸಮಗಳು = Identities

ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ, ಮ. ಸಾ. ವಿ., ದೃಢಭಾಜಕ = Highest common Factor, H. C. F.

ಯೋಗವಿಯೋಗ ರೀತಿ = Method of addition and subtraction.

ಲಘುತ್ತಮ ಸಮುಚ್ಛೇದ = Lowest Common Denominator.

ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ ಲ. ಸಾ. ವಿ. = Lowest Common Multiple, L. C. M.

ಲೋಪ ಮಾಡುವದು = Elimination.

ವಿಸ್ತಾರಗಳು = Expansions (of the formula)

ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ = Reciprocal

ಸಮುಪಮಾನಿಕ (ಸಮಯಾಮಿಕ) ಸಮೀಕರಣಗಳು, ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳು = Simultaneous Equations.

ಸಾದಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು = Simple Equations.

ಸೂತ್ರಗಳು = Formulas.

ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಸಾದಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

೧·೧. ಹೊಸ ವರ್ಷದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿ ಒಮ್ಮೆ ನಾವು **ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು,** ಇವುಗಳ ಕಡೆಗೆ ಹೊರಳೋಣ. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಅವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ **ದಹಂ** ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು **ಎಕ್ಕಂ** ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಿಂತ ೫ ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಎಂಟು ಪಟ್ಟು ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಯು ಯ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ **ದಹಂ** ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಯು ಯ+೫ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ **ಸಂಖ್ಯೆಯು** ೧೦(ಯ+೫)+ಯ ಇರುವದು, ಮತ್ತು **ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು** ಯ+೫+ಯ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ,

$$೧೦(ಯ+೫)+ಯ = ೮(ಯ+೫+ಯ)$$
$$\therefore \quad ೧೦ಯ+೫೦+ಯ = ೮(೨ಯ+೫)$$
$$\therefore \quad ೧೧ಯ+೫೦ = ೧೬ಯ+೪೦$$
ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $$೫೦-೪೦ = ೧೬ಯ-೧೧ಯ$$
$$\therefore \quad ೧೦ = ೫ಯ$$
$$\therefore \quad ಯ = ೨.$$

∴ **ದಹಂ** ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು **೭,** ಮತ್ತು **ಎಕ್ಕಂ** ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು **೨.**

∴ **ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೭೨.**

[**ತಾಳೆ: ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು = ೭ + ೨ = ೯; ೯ × ೮ = ೭೨.**]

ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಯ ಬೆಲೆಯು ಆ ಅಂಕೆಯು ಯಾವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರುವದೋ ಆ ಸ್ಥಾನದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ೩, ೫, ಮತ್ತು ೮ ಈ ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಆದ ೩೫೮, ೮೩೫, ೫೮೩ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ೩ ಈ ಅಂಕೆಯು ಒಂದನೆಯದರಲ್ಲಿ ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೩೦೦, ೩೦, ಮತ್ತು ೩ ಹೀಗೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಯಾವ ಸಂಗತಿಯು ೩ ರದೋ ಅದೇ ೫ ರದು ಮತ್ತು ೮ ರದು.

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ, ರ ಮತ್ತು ಲ ಈ ಅಂಕೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ೧೦೦ಯ + ೧೦ರ + ಲ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿಯಂತೆ ಯರಲ ಎಂದು ಬರೆಯುವದಿಲ್ಲ. ಯರಲ ಅಂದರೆ ಯ × ರ × ಲ. ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾಲೇಖನದಲ್ಲಿಯ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹಿಂದೆ ಭಾಗ ೧, ಪು. ೭, ೮ ರಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡಿದೆ. ಆ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪುನಃ ಓದಿರಿ.

ಉ. ೨. ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಿಂತ ೨ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡೂವರೆ ಪಟ್ಟಿನೊಳಗಿಂದ ೪೨ ಕಳೆದರೆ ಯಾವುದು ಶೇಷ ಉಳಿಯುವದೋ ಅದರಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳು ತಿರುವುಮುರುವು ಆದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ ಶತಂ ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನಗಳೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಯ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಯ+೨ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಯ+ಯ+೨, ಅಂದರೆ ೨ಯ+೨ ಇರುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ೧೦೦ಯ + ೧೦ (ಯ + ೨) + ೨ಯ + ೨ ಇದ್ದು ತಿರುವುಮುರುವು ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦೦ (೨ಯ + ೨) + ೧೦ (ಯ + ೨) + ಯ ಇರುವದು.

$$\therefore \text{೨}\tfrac{\text{೧}}{\text{೨}}\{\text{೧೦೦ಯ} + \text{೧೦}(\text{ಯ}+\text{೨}) + \text{೨ಯ} + \text{೨}\} - \text{೪೨} = \text{೧೦೦}(\text{೨ಯ}+\text{೨}) + \text{೧೦}(\text{ಯ}+\text{೨}) + \text{ಯ}$$

$$\therefore \text{೨}\tfrac{\text{೧}}{\text{೨}}(\text{೧೦೦ಯ} + \text{೧೦ಯ} + \text{೨೦} + \text{೨ಯ} + \text{೨}) - \text{೪೨} = \text{೨೦೦ಯ} + \text{೨೦೦} + \text{೧೦ಯ} + \text{೨೦} + \text{ಯ}$$

$$\therefore \text{೨}\tfrac{\text{೧}}{\text{೨}}(\text{೧೧೨ಯ} + \text{೨೨}) - \text{೪೨} = \text{೨೧೧ಯ} + \text{೨೨೦}$$

$$\therefore \text{೨೮೦ಯ} + \text{೫೫} - \text{೪೨} = \text{೨೧೧ಯ} + \text{೨೨೦}$$

$$\therefore \text{೨೮೦ಯ} + \text{೧೩} = \text{೨೧೧ಯ} + \text{೨೨೦}$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $\text{೨೮೦ಯ} - \text{೨೧೧ಯ} = \text{೨೨೦} - \text{೧೩}$

$$\therefore \text{೬೯ಯ} = \text{೨೦೭}$$

$$\therefore \text{ಯ} = \text{೩}.$$

∴ **ಶತಂ** ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ೩, **ದಹಂ** ಸ್ಥಾನದ್ದು ೫, ಮತ್ತು **ಏಕ್ಕಂ** ಸ್ಥಾನದ್ದು ೮, ಆದುದರಿಂದ **೩೫೮ ಇದು ಇಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯು.**

[ತಾಳೆ: ೩೫೮ × ೨½ − ೪೨ = ೮೯೫ − ೪೨ = ೮೫೩.]

ಉ. ೩. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ೧೨ ಆಣೆಗೆ ೧ ಸೇರಿನಂತೆ ೪೦ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ೧೦ ಆಣೆಗೆ ೧ ಸೇರು ದರದ ಕೆಲವು ಹಾಲನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅದನ್ನು ೧೪ ಆಣೆಗೆ ೧ ಸೇರಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಆ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ನೂರಕ್ಕೆ ೨೪ ರಂತೆ ಲಾಭವಾದರೆ ಅವನು ಕಡಿಮೆ ತರಗತಿಯ ಎಷ್ಟು ಹಾಲನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಕಡಿಮೆ ದರದ ಪ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಮಿಶ್ರಣವು ೪೦+ಪ ಸೇರುಗಳಿರುವದು. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ೧೪ ಆಣೆಗೆ ೧ ಸೇರು ಈ ದರದಂತೆ ೧೪(೪೦+ಪ) ಆಣೆಗಳಿಗೆ ಮಾರಲಾಗುವದು. ಮೊದಲಿನ ೪೦ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ೧೨ ಆಣೆಗೆ ಸೇರು ಈ ದರದಂತೆ ೪೮೦ ಆಣೆಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡಿದೆ. ಮತ್ತು ಪ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ೧೦ ಆಣೆಗೆ ಸೇರು ಈ ದರದಂತೆ ೧೦ ಪ ಆಣೆಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡಿದೆ, ಅಂದರೆ ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು (೪೮೦+೧೦ಪ) ಆಣೆಗಳು ಆಯಿತು. ಮತ್ತು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೪ ಲಾಭವಾಗಿದ್ದರಿಂದ ಅವನ್ನು ೧೨೪/೧೦೦ (೪೮೦ + ೧೦ಪ) ಆಣೆಗಳಿಗೆ ಮಾರಿರಬೇಕು.

ಆದುದರಿಂದ, ೧೪(೪೦+ಪ) = ೧೨೪/೧೦೦ (೪೮೦+೧೦ಪ)

∴ ೧೪(೪೦+ಪ) = ೬೨/೫ (೪೮+ಪ)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ೭(೪೦+ಪ) = ೩೧/೫ (೪೮+ಪ)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೫ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೩೫(೪೦+ಪ) = ೩೧ (೪೮+ಪ)

∴ ೧೪೦೦ + ೩೫ಪ = ೧೪೮೮ + ೩೧ಪ

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೩೫ಪ − ೩೧ಪ = ೧೪೮೮ − ೧೪೦೦

∴ ೪ಪ = ೮೮

∴ ಪ = ೨೨.

೨೨ ಸೇರುಗಳು ಇದು ಉತ್ತರ.

[ತಾಳೆ: ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = (೪೦×೧೨ + ೨೨×೧೦) ಆ. = (೪೮೦ + ೨೨೦) ಆ. = ೭೦೦ ಆ. ಮಿಶ್ರಣದ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು = (೬೨×೧೪) ಆ. = ೮೬೮ ಆ. (೭೦೦×೧೨೪)/೧೦೦ = ೮೬೮.]

ಉ. ೪. ಒಬ್ಬ ಬೆಣ್ಣೆ ಮಾರುವವನು ೨:೩ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅದನ್ನು ೩॥ ರೂ. ರತ್ತಲು ಈ ದರದಿಂದ ಮಾರುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೫ ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಗಿಂತ ಎರಡನೆಯ ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ೮ ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯ ದರವು ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ವ ರೂ. ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ ಎರಡನೆಯ ತರದ ಬೆಣ್ಣೆಯ ದರವು (ವ+$\frac{೧}{೨}$) ರೂ. ಇರುವದು.

ಮಿಶ್ರಣದ ಸಲುವಾಗಿ ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೨ ರತ್ತಲು ಬೆಣ್ಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಎರಡನೆಯ ತರದ ೩ ರತ್ತಲುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಈಗ ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೨ ರತ್ತಲುಗಳ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು ೨ ವ ರೂ. ಇದ್ದು ಎರಡನೆಯ ತರದ ೩ ರತ್ತಲುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೩(ವ+$\frac{೧}{೨}$) ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಒಟ್ಟು ೫ ರತ್ತಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು { ೨ವ+೩(ವ+$\frac{೧}{೨}$) } ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಲಾಭವು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೫ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಮಾರುವ ಬೆಲೆಯು $\frac{೫}{೪}$ { ೨ವ+೩(ವ+$\frac{೧}{೨}$) } ರೂ. ಇರುವದು. ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣದ ಮಾರುವ ಬೆಲೆಯು ರತ್ತಲಿಗೆ ೩॥ ರೂ. ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ, ಅಂದರೆ ೫ ರತ್ತಲುಗಳ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ೧೭॥ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ,

$$\frac{೫}{೪} \{ ೨ವ+೩(ವ+\frac{೧}{೨}) \} = ೧೭\frac{೧}{೨}$$
$$\therefore\ ೨ವ+೩(ವ+\frac{೧}{೨}) = \frac{೩೫}{೨} \times \frac{೪}{೫}$$
$$\therefore\ ೨ವ+೩ವ+೧\frac{೧}{೨} = ೧೪$$
$$\therefore\ ೫ವ = ೧೨\frac{೧}{೨}$$
$$\therefore\ ವ = ೨\frac{೧}{೨}.$$

೨$\frac{೧}{೨}$ ರೂ; ೩ ರೂ. ಉತ್ತರ.

[ತಾಳೆ: ಮೊದಲನೆಯ ೨ ರತ್ತಲುಗಳ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು, ೫ ರೂ.; ಎರಡನೆಯ ೩ ರತ್ತಲುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೯ ರೂ. ∴ ೫ ರತ್ತಲುಗಳ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು ೧೪ ರೂ. ೫ ರತ್ತಲುಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು, ೧೭$\frac{೧}{೨}$ ರೂ. ೧೪ × $\frac{೧೨೫}{೧೦೦}$ = ೧೭$\frac{೧}{೨}$.]

ಉ. ೫. ಮನೆಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವ ಮತ್ತು ಮಾರುವ ವ್ಯವಹಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನಿಗೆ ದರವು ಇಳಿದಾಗ್ಗೆ ಹಣದ ಅಡಚಣಿಯ

ಮೂಲಕ ಒಂದು ಮನೆಯನ್ನು ಹಾನಿಪಟ್ಟು ೧೮೦೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಮಾರ-ಬೇಕಾಯಿತು. ಕೆಲವು ದಿನಗಳ ಹಿಂದೆ ಮನೆಗಳಿಗೆ ಬೇಡಿಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಇರು-ವಾಗ ಅದು ೨೯೦೦೦ ರೂ.ಗೆ ಮಾರಲ್ಪಡುತ್ತಿತ್ತು, ಮತ್ತು ಆವನಿಗೆ ಈಗ ಆದ ಹಾನಿಯ ನಾಲ್ಕೂವರೆ ಪಟ್ಟು ಲಾಭವು ಆಗ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಆ ಮನೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದನು?

ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು ಯ ರೂ. ಇದ್ದರೆ, ಆದ ಹಾನಿಯು = (ಯ − ೧೮೦೦೦) ರೂ. ಮೊದಲು ಮಾರಿದ್ದರೆ ಆವನಿಗೆ ಆಗುವ ಲಾಭವು = (೨೯೦೦೦ − ಯ) ರೂ.

$$\therefore \quad ೪\tfrac{೧}{೨}\,(\text{ಯ} - ೧೮೦೦೦) = ೨೯೦೦೦ - \text{ಯ}$$

$$\therefore \quad ೪\tfrac{೧}{೨}\,\text{ಯ} - ೮೧೦೦೦ = ೨೯೦೦೦ - \text{ಯ}$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೪\tfrac{೧}{೨}\,\text{ಯ} + \text{ಯ} = ೨೯೦೦೦ + ೮೧೦೦೦$

$$\therefore \quad ೫\tfrac{೧}{೨}\,\text{ಯ} = ೧೧೦೦೦೦$$

$$\therefore \quad \textbf{ಯ} = \textbf{೨೦೦೦೦}$$

೨೦೦೦೦ ರೂ. ಉತ್ತರ.

[ತಾಳೆ: ಹಾನಿಯು (೨೦೦೦೦ − ೧೮೦೦೦) ರೂ. = ೨೦೦೦ ರೂ.; ಲಾಭವು = (೨೯೦೦೦ − ೨೦೦೦೦) ರೂ. = ೯೦೦೦ ರೂ. ೨೦೦೦ × $೪\tfrac{೧}{೨}$ = ೯೦೦೦.]

ಉ. ೬. ಆನಂದರಾಯರ ಮತ್ತು ವಸಂತರಾಯರ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯಗಳು ಸರಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆನಂದರಾಯರು ತಮ್ಮ ಆದಾಯದ ಆರನೆಯ ಪಾಲನ್ನು ನಿಯಮದಿಂದ ಉಳಿಸುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ವಸಂತರಾಯರ ಖರ್ಚು ಆನಂದರಾಯರ ಖರ್ಚಿಗಿಂತ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೦೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ವಸಂತರಾಯರಿಗೆ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ೬೦೦ ರೂ. ಸಾಲವಾಗು-ತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವೆಷ್ಟು?

ಮಾಸಿಕ ಉತ್ಪನ್ನವು ವ ರೂ. ಇದ್ದರೆ, ಆನಂದರಾಯರ ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚು $\frac{೫}{೬}$ವ ರೂ. ಇರುವದು ಮತ್ತು ವಸಂತರಾಯರದು ($\frac{೫}{೬}$ವ + ೧೦೦) ರೂ. ಇರುವದು. ಉತ್ಪನ್ನವು ವ ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ವಸಂತರಾಯರಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ($\frac{೫}{೬}$ವ + ೧೦೦ − ವ) ರೂ. ಸಾಲವಾಗುತ್ತಿರಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ,

$$೧೨\left(\tfrac{೫}{೬}\text{ವ} + ೧೦೦ - \text{ವ}\right) = ೬೦೦$$

$$\therefore \quad ೧೨\left(೧೦೦ - \tfrac{೧}{೬}\text{ವ}\right) = ೬೦೦$$

$$\therefore \quad ೧೦೦ - \tfrac{೧}{೬}\text{ವ} = ೫೦$$

$$\therefore \quad \tfrac{೧}{೬}\text{ವ} = ೫೦$$

$$\therefore \quad \textbf{ವ} = \textbf{೩೦೦}$$

೩೦೦ ರೂ. ಉತ್ತರ.

[ತಾಳೆ: ಆನಂದರಾಯರು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೫೦ ರೂ. ಉಳಿಸುತ್ತಾರೆ, ಅಂದರೆ ಅವರ ಖರ್ಚು ೨೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ವಸಂತರಾಯರದು ೩೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅವರಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೫೦ ರೂ. ಸಾಲವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಸಾಲದ ರಕಮು ೬೦೦ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ.]

ಉ. ೭. ಒಬ್ಬ ರೈತನು ಒಬ್ಬ ಜಮೀನದಾರನ ತೆಂಗಿನ ತೋಟವನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೪೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ಕೆಲವು ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ಕರಾರಿನಿಂದ ಹಿಡಿದನು. ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಯ ದರವು ನೂರಕ್ಕೆ ೫ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ಜಮೀನದಾರನಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ಪ್ರತಿ ಗಿಡದಿಂದ ೪ ರೂ. ಉತ್ಪನ್ನವು ದೊರೆಯುತ್ತಿತ್ತು. ಮತ್ತು ಈಗ ದರವು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೫ ರೂ. ಆಗಿದ್ದರಿಂದ ೧೨ ರೂ. ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ಕರಾರವಾಗಿದೆ?

ಕರಾರಿನೊಳಗಿನ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ನ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ರೂ. ದರ ಇದ್ದಾಗ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆಯು $\frac{\text{ನ}}{\text{೨೦}}$ ರೂ. ಆಗುವದು. ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು $\left(\text{೪೦೦} + \frac{\text{ನ}}{\text{೨೦}}\right)$ ರೂ. ಆಗುವದು. ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಿಡವ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ೪ ರೂ. ಇತ್ತು.

ಆದುದರಿಂದ, $\dfrac{\text{೪೦೦} + \frac{\text{ನ}}{\text{೨೦}}}{\text{೪}}$ ಗಿಡಗಳು ಇದ್ದಿರಬೇಕು.

೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೫ ರೂ. ದರದಿಂದ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆಯು $\frac{\text{ನ}}{\text{೪}}$ ರೂ. ಆಗುವದು ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು $\left(\text{೪೦೦} + \frac{\text{ನ}}{\text{೪}}\right)$ ರೂ. ಇರುವದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಿಡದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ೧೨ ರೂ. ದೊರೆಯುವದರಿಂದ $\dfrac{\text{೪೦೦} + \frac{\text{ನ}}{\text{೪}}}{\text{೧೨}}$ ಗಿಡಗಳಿದ್ದಿರಬೇಕೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{\text{೪೦೦} + \frac{\text{ನ}}{\text{೪}}}{\text{೧೨}} = \frac{\text{೪೦೦} + \frac{\text{ನ}}{\text{೨೦}}}{\text{೪}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{೧೬೦೦} + \text{ನ}}{\text{೪೮}} = \frac{\text{೮೦೦೦} + \text{ನ}}{\text{೮೦}}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨೪೦ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೫(೧೬೦೦+ನ) = ೩(೮೦೦೦+ನ)

∴ ೮೦೦೦ + ೫ನ = ೨೪೦೦೦ + ೩ನ

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೫ನ − ೩ನ = ೨೪೦೦೦−೮೦೦೦

∴ ೨ನ = ೧೬೦೦೦

∴ **ನ** = ೮೦೦೦

೮೦೦೦ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳು.

[ತಾಳೆ: ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ರೂ. ಈ ದರದಿಂದ ೮೦೦೦ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆಯು ೪೦೦ ರೂ. ∴ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು ೮೦೦ ರೂ. ∴ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೮೦೦ ÷ ೪ = ೨೦೦. ೮೦೦೦ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೨೫ ರೂ. ದರದಿಂದ ಬೆಲೆಯು ೨೦೦೦ ರೂ. ∴ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು = ೨೪೦೦ ರೂ., ∴ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು = ೨೪೦೦/೧೨ = ೨೦೦.]

ಉ. ೮. ಒಬ್ಬ ವರ್ತಕನು ರತ್ತಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ಮತ್ತು ೩। ರೂ. ಈ ಎರಡು ದರಗಳಿಂದ ಕೆಲವಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೩॥ ರೂ.ಗೆ ರತ್ತಲಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೨½ ಲಾಭವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ತರದ ಚಹವನ್ನು ಅವನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆ?

ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೧ ರತ್ತಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ಅವನು ಎರಡನೆಯ ತರದ ಪ ರತ್ತಲು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಈಗ

ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ಚಹದ ೧ ರತ್ತಲಿನ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = ೨ ರೂ.
ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ತರದ ಪ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = ೩¼ ಪ ರೂ.

∴ (೧ + ಪ) ರತ್ತಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = (೨ + ೩¼ಪ) ರೂ.
ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ಮಾರಿದರೆ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೨½ ಲಾಭವಾಗುತ್ತದೆ, ಆದುದರಿಂದ (೧ + ಪ) ರತ್ತಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮಾರುವ ಬೆಲೆಯು

= ೧೧೨½/೧೦೦ (೨ + ೩¼ಪ) ರೂ.

= ೯/೮ (೨ + ೩¼ಪ) ರೂ.

ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೩½ ರೂ.ಗೆ ರತ್ತಲಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಈ ದರದಿಂದ (೧ + ಪ) ರತ್ತಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಬೆಲೆಯು ೩½ (೧ + ಪ) ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ೯/೮ (೨ + ೩¼ಪ) = ೩½ (೧ + ಪ)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೭(೨+೨\frac{೧}{೪}ಪ) = ೧೫(೧+ಪ)$

$\therefore \quad ೧೪ + ೧೫\frac{೩}{೪}ಪ = ೧೫ + ೧೫ಪ$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೧೫\frac{೩}{೪}ಪ - ೧೫ಪ = ೧೫ - ೧೪$

$\frac{೩}{೪}ಪ = ೧$

$ಪ - \frac{೪}{೩}$

ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೧ ರತ್ತಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ತರದ $\frac{೪}{೩}$ ರತ್ತಲು ಇಲ್ಲವೆ ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೩ ರತ್ತಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ತರದ ೪ ರತ್ತಲು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾನೆ. **೩ : ೪ ಉತ್ತರ.**

[ತಾಳೆ: ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ೩ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು=೬ ರೂ.; ಎರಡನೆಯ ತರದ ೪ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = ೯ ರೂ.; ಒಟ್ಟು ೭ ರತ್ತಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು = (೬ + ೯) ರೂ. = ೧೫ ರೂ. ೨॥ ರೂ. ದರದಂತೆ ೭ ರತ್ತಲು ಮಿಶ್ರಣದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು = ೧೭॥ ರೂ. ಲಾಭವು = (೧೭॥ − ೧೫) ರೂ. = ೨॥ ರೂ. ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಲಾಭವು $\frac{೨\frac{೧}{೨} \times ೧೦೦}{೧೫} = \frac{೫೦}{೩} = ೧೬\frac{೨}{೩}$.]

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧.

೧. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಒಂದು ಕುದುರೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಂಡಿಯನ್ನು ೨೦೦೦ ರೂ. ಗೆ ಕೊಂಡನು. ಕುದುರೆಯನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೫ ಲಾಭವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಬಂಡಿಯನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೦ ಲಾಭವನ್ನೂ ಪಡೆದು ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೨೬೦ ರೂ. ಲಾಭವಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨. ಎರಡು ಆಯತಾಕೃತಿ ಹೊಲಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ಅಗಲಳತೆಯ ಒಂದೂವರೆ ಪಟ್ಟು ಇದ್ದು ಎರಡನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೪೦ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಅದರ ಅಗಲಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಅಗಲಳತೆಗಿಂತ ೧೦ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಎರಡನೆಯ ಹೊಲವು ಮೊದಲನೆಯದರಗಿಂತ ೨೬೦೦ ಚೌ. ವಾ. ದೊಡ್ಡದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಉಗಿಬಂಡಿಯು ೩೦ ಮಿನಿಟು ಮೊದಲೇ ಹೊರಟ ಮತ್ತೊಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಯನ್ನು ಒಂದು

ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ಹಿಂದೆ ಹಾಕುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎರಡನೆಯ ಉಗಿಬಂಡಿಯ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು?

೪. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೩॥ ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಮತ್ತು ೩॥। ದರದಿಂದ ಕೆಲವು, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೬೦೦೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಬಡ್ಡಿಗೆ ಹಚ್ಚಿದನು. ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ೫೯೦ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಯಾವ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೫. ಎರಡೂವರೆ ರೂ. ಗೆ ರತ್ತಲು ಇರುವಂಥ ೨೬ ರತ್ತಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ಮೂರುವರೆ ರೂ. ಗೆ ರತ್ತಲು ಇರುವಂಥ ಎಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ರತ್ತಲಿಗೆ ೩ ರೂ. ೭ ಆಣೆ ದರದಂತೆ ಮಾರಿದರೆ ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೦ ಲಾಭವಾಗುವದು?

೬. ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ವರೆಗೆ ಕ್ರಮದಿಂದ ೧ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುತ್ತವೆ. ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿಂದ ೯ ಕಳೆಮು ಉಳಿದ ಶೇಷಕ್ಕೆ ೩೧ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೭. ಶರದ್ ಮತ್ತು ವಿಜಯ ಇವರಿಬ್ಬರ ಹತ್ತಿರ ಒಟ್ಟು ೬೪ ಗಜಗಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಶರದನು ತನ್ನಲ್ಲಿಯ ಗಜಗಗಳಲ್ಲಿ ೧೨ ಗಜಗಗಳನ್ನು ವಿಜಯನಿಗೆ ಕೊಟ್ಟರೆ ವಿಜಯನ ಹತ್ತಿರ ಶರದನ ಬಳಿಯಲ್ಲಿರುವ ಗಜಗಗಳ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಗಜಗಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಗಜಗಗಳಿದ್ದವು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ವಸಂತರಾಯರು ಮತ್ತು ಅನಂತರಾಯರು ಇವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಸಂತೆಗೆ ಹೋಗುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ೧೧೨ ರೂ. ಇದ್ದವು. ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ ವಸಂತರಾಯರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ $\frac{೨}{೩}$ ಹಣವನ್ನೂ, ಮತ್ತು ಅನಂತರಾಯರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣದ $\frac{೪}{೫}$ ಭಾಗವನ್ನೂ, ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದರು. ಕೊನೆಗೆ ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿಯೂ ಅಷ್ಟೇ ಹಣ ಉಳಿಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಸಂತೆಗೆ ಹೋಗುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಹತ್ತಿರ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತು?

೯. ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದ ಉದ್ದಳತೆಯು ಅಗಲಳತೆಗಿಂತ ೬ ಇಂ. ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ೨ ಇಂ. ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ

ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯನ್ನು ೧ತ್ತಿ ೩೦. ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅಷ್ಟೇ ಉಳಿಯುವದು. ಆದರೆ ಅದರ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೦. ಎರಡು ನಿಲ್ದಾಣಗಳಿಂದ ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೊರಟ ಎರಡು ಬಂಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಹೊರಟ ಬಂಡಿಯು ಮುಂದಿನ ಬಂಡಿಯನ್ನು ೨೪ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದೆ ಹಾಕುತ್ತದೆ. ಆ ಎರಡೂ ಬಂಡಿಗಳು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೊರಟಿದ್ದರೆ, ಹೊರಟ ತರುವಾಯ ೪ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಎರಡೂ ಬಂಡಿಗಳ ತಾಸಿನ ವೇಗ-ಗಳಲ್ಲಿ ೧೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರವಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಾಸಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಮೈಲು ಹೋಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೧. ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಿಂತ ೨ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಿಂತ ೨ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೨೦ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ೬ ಶೇಷವು ಉಳಿಯುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೧೨. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಚಹದ ಕೆಲವು ರತ್ತಲಿನ ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಪೇಟೆಗೆ ಹೋದನು. ಅಲ್ಲಿ ೨ ರೂ. ೬ ಆ. ಒಂದು ರತ್ತಲು ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ೯ ಆ. ಒಂದು ರತ್ತಲು, ಹೀಗೆ ಎರಡು ತರದ ಚಹಗಳು ಇದ್ದದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಮೊದಲನೆಯ ತರದ ಚಹವನ್ನು ಕೊಂಡರೆ ತನ್ನಲ್ಲಿ ಇದ್ದ ಹಣದಲ್ಲಿ ೬। ರೂ. ಉಳಿಯುತ್ತವೆಂದು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ತರದ ಅಷ್ಟೇ ಚಹವನ್ನು ಕೊಂಡರೆ ೩ ರೂ. ೨ ಆ. ಕಡಿಮೆ ಬೀಳುತ್ತವೆಂದು ಅವನಿಗೆ ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಆದರೆ ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೩. ತನ್ನ ಊರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಹೋಗುವ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನ ಮುಕ್ಕಾಮಿನ ಊರಿಗೆ ೨ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ತನ್ನ ನಡೆಯುವ ವೇಗವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲಿನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅವನು ಕಾಲು ತಾಸು ಮೊದಲು ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೧೪. ಒಂದು ರತ್ತಲು ಚಹವು ಮತ್ತು ಒಂದು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳಿಗೆ ೩। ರೂ. ಬೆಲೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಚಹದ ದರವು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೫ ರಿಂದ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೮½ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾದ ಮೂಲಕ ೩ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೫ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೧ ರೂ. ೧೫ ಆ. ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಮೊದಲು ಇದ್ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ದರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೫. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವನು ಠೋಕ ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಮೋಸಂಬಿಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ೨ ರೂ. ಡಝುನ್ನಿನಂತೆ ಮಾರಿ ೯ ರೂ. ೬ ಆ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆದನು. ಎರಡನೆಯ ಬಾರಿ ಅದೇ ದರದಿಂದ ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು. ಆದರೆ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಧೆ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಡಝುನ್ನಿಗೆ ೧¾ ರೂ. ಈ ದರದಂತೆ ಮಾರಬೇಕಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ೯ ರೂ. ೬ ಆ. ಹಾನಿಯಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿ ಬಾರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನು?

೧೬. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಊರಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲಿ ಖಾತೆಗಳನ್ನು ಇಡುತ್ತಾನೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ೪೦೦ ರೂ. ತೆಗೆದು ಎರಡನೆಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ, ಎರಡನೆಯದರೊಳಗಿನ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದರೊಳಗಿನ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ರಕಮು ಜಮೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ವಿರುದ್ಧ, ಎರಡನೆಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ೨೦೦ ರೂ. ತೆಗೆದು ಮೊದಲನೆಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಎರಡೂ ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲಿಟ್ಟ ರಕಮುಗಳು ಸರಿ ಆಗುವವು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವು ಜಮೆಯಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೭. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲು ವೇಗದಂತೆ ಕೆಲವು ಅಂತರವನ್ನೂ, ಮತ್ತು ೩½ ಮೈಲು ವೇಗದಂತೆ ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನೂ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೪ ಮೈಲು ಅಂತರವನ್ನು ನಡೆದನು. ಅವನು ನಾಲ್ಕು ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋದ ಅಂತರವನ್ನು ೩½ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ, ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನು ೪ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಿದ್ದರೆ, ಅವನಿಗೆ ೧೫ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಅವನು ೪ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವನ್ನು ನಡೆದನು?

೧೮. ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಮೂರೂ ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೨ ಇದ್ದು, ನಡುವಿನ ಅಂಕೆಯು ಮೂರು ಪಟ್ಟಿನಷ್ಟು ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿಂದ ೯೯ ಕಳೆದು ಉಳಿದ ಶೇಷದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೧೯. ಇಬ್ಬರು ಗೃಹಸ್ಥರ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಸರಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಒಬ್ಬನು ತನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಸಿಲುಕು ಇಡುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯವನ ಖರ್ಚು ಮೊದಲನೆಯವನ ಖರ್ಚಿಗಿಂತ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೧೫೦೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದದ್ದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ೪ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ೨೦೦೦ ರೂ. ಸಾಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವರ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೦. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನ ಹತ್ತರ ಇದ್ದ ೫೦೦೦೦ ರೂ. ರಕಮಿನಲ್ಲಿ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನೂ, ಮತ್ತು ೩ೲ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನೂ ಇಡುತ್ತಾನೆ. ಈ ಠೇವುಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಒಟ್ಟು ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯು ೧೮೭೦ ರೂ. ಗಳಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ರಕಮನ್ನು ಇಟ್ಟಿರುತ್ತಾನೆ ?

೨೧. ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗೆ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ೮ ಇದ್ದು, ನಡುವಿನ ಅಂಕೆಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೨೯೭ ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ ಬರುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಯು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡು-ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೨. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವನು ಕೆಲವು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ೧॥ ರೂ. ಗೆ ಡಝನ್ನಿನಂತೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಆರು ಪಟ್ಟು ಅನು-ಕ್ರಮವಾಗಿ ೧॥। ರೂ. ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ಗೆ ಡಝನ್ನಿನಂತೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ೩ ಆಣೆಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೫ ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಅವನು ಯಾವ ಯಾವ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎಷ್ಟು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನು ?

೨೩. ಒಬ್ಬ ಹೆಣ್ಣು ಮಾರುವವಳು ರೂ. ಗೆ ೧೦ ರಂತೆ ಕೆಲವನ್ನೂ ಮತ್ತು ೯ ರಂತೆ ಕೆಲವನ್ನೂ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೯೬ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಳು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ೨ ಆಣೆಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಮಾರಿದಳು. ಈ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವಳಿಗೆ ೨ ರೂ. ಲಾಭವಾಗಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದ ಎಷ್ಟು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಅವಳು ಕೊಂಡಿದ್ದಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೪. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ಕಡಿಮೆ ದರದ ೨೮ ಪೌಂಡು ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ಪೌಂಡಿಗೆ ೫ ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚು ದರವಿರುವ ೧೨ ಪೌಂಡು ಚಹವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿ ಅದನ್ನು ಪೌಂಡಿಗೆ ೨॥ ರೂ. ದರದಿಂದ ಮಾರಲಾಗಿ ೧೩॥ ರೂ. ಲಾಭ ಪಡೆದನು. ಆದರೆ ಕಡಿಮೆ ತರದ ಚಹದ ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತು ?

೨೫. ಒಂದು ರೂ. ಗೆ ಸೇರಿನಂತೆ ಕೊಂಡ ೨೨ ಸೇರು ಹಾಲಿನಲ್ಲಿ ೯ ಆಣೆಗೆ ಸೇರಿನಂತೆ ಕೊಂಡ ಎಷ್ಟು ಹಾಲು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ, ಮಿಶ್ರಣವು ೧೪ ಆಣೆಗೆ ಸೇರಿನಂತೆ ಮಾರಿ, ನೂರಕ್ಕೆ ೨೫ ಲಾಭವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ?

೨೬. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಿಂತ ೩ ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದ್ದು, ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಏಳು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೩ ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೭. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಿಂತ ೪ ರಿಂದ ಸಣ್ಣದಿದ್ದು, ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{೪}{೭}$ ಇರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೮. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ತನ್ನ ಊರಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ಬಂದನು. ಹೋಗುವಾಗ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೧೨ ಮೈಲುಗಳು ಮತ್ತು ತಿರುಗಿ ಬರುವಾಗ ವೇಗವು ೯ ಮೈಲುಗಳು ಇದ್ದರೆ, ಅವನಿಗೆ ಈ ಪ್ರವಾಸದಲ್ಲಿ ೫ ಮಿನಿಟುಗಳು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೯. ಒಬ್ಬ ಶ್ರೀಮಂತ ಗೃಹಸ್ಥನು ತಿರುಗಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಹೊರಗೆ ಹೋದಾಗ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಅವನು ಭಿಕ್ಷುಕರ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ತಂಡನ್ನು ಕಂಡನು. ಪ್ರತಿ-ಯೊಬ್ಬ ಭಿಕ್ಷುಕನಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಆಣೆ ಕೊಡಬೇಕೆಂದು ಅವನು ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿ ಅವನಿಗೆ ತನ್ನ ಹತ್ತಿರ ಆ ಹೊತ್ತಿನಲ್ಲಿ ೩ ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಮೂರು ಆಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟನು ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ತನ್ನ ಹತ್ತರ ಮೂರುಕಾಲು ರೂಪಾಯಿ ಸಿಲುಕು ಇದ್ದದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಗೊತ್ತಾಯಿತು. ಆದರೆ ಒಟ್ಟು ಭಿಕ್ಷುಕರು ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಇದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೦. ಎರಡು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೬ ನೆಯ ಅಂಶವು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೮ ನೆಯ ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೩೧. ಒಬ್ಬ ಮೋಟಾರ ಡ್ರಾಯವರನು ತನ್ನ ೧೨೦ ಮೈಲಿನ ಪ್ರವಾಸ-ವನ್ನು ಮೊದಲು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮೋಟಾರನ್ನು ನಡಿಸಿ ೩ ತಾಸು ೩೬ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಅಂತರ-ವನ್ನು ಮೋಟಾರ ನಡಿಸಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೨. ಇಬ್ಬರು ಸಹೋದರರ ವಯಸ್ಸುಗಳಲ್ಲಿ ೪ ವರ್ಷಗಳ ಅಂತರವು ಇದ್ದು, ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇಂದು ಅವರ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸಿದೆ. ಆರು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಮಕ್ಕಳ ಆ ಹೊತ್ತಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ೧$\frac{೨}{೩}$ ಪಟ್ಟು ಇರುವದು. ಆದರೆ ಈಗಿನ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೩. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಹೋದ ವರ್ಷ ಹುಡುಗಿಯರಿಗಿಂತ ಹುಡುಗರು ೧೦೦ ಮಂದಿ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರು. ಈ ವರ್ಷ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೦ ರಿಂದ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಳೆಯಿತು ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಹುಡುಗಿಯರಿಗಿಂತ ಹುಡುಗರು ೧೫೯ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಈಗ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳಿದ್ದಾರೆಂಬು-ದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೪. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ೬ ರೂ. ಗೆ ಚೌರಸ ವಾರಿನಂತೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಾಗೆಯನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ೮೦೦ ಚೌ. ವಾರ ಜಾಗೆಯನ್ನು ಸ್ವಂತಕ್ಕಾಗಿ ಮನೆ ಕಟ್ಟಲು ಕಾಯ್ದಿಟ್ಟು, ಉಳಿದ ಜಾಗೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ದಿವಸಗಳ ತರುವಾಯ ಹೆಚ್ಚು ದರ ಬಂದದ್ದರಿಂದ ೧೫ ರೂ. ಗೆ ಚೌ. ವಾರಿನಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಸ್ವಂತಕ್ಕಾಗಿ ಜಾಗೆಯು ಪುಕ್ಕಟೆಯಾಗಿ ಸಿಕ್ಕು, ಮೇಲಾಗಿ ೧೫೦೦ ರೂ. ಅವನು ಲಾಭ ಪಡೆದನು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಜಾಗೆಯನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೫. ಅಣ್ಣನ ವಯಸ್ಸು ಈಗ ವಸಂತರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೧$\frac{೧}{೪}$ ಪಟ್ಟು ಇದೆ. ಆದರೆ ೪೯ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ಮೂರು ಪಟ್ಟಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅದು ವಸಂತರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಇತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩೬. ನೆಲದ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ತುಂಡು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಕಟ್ಟುವ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ತರದ ಮನೆ, ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಕೂಡಿ, ಹೋದ ವರ್ಷ ೩೦೦೦೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಈಗ ನೆಲದ ಬೆಲೆಯು ನೂರಕ್ಕೆ ೫೦ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದು, ಮನೆ ಕಟ್ಟುವ ಖರ್ಚು ನೂರಕ್ಕೆ ೨೫ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ೩೯೦೦೦ ರೂ. ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನೆಲದ ಈಗಿನ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು?

೧.೨. ಉ. ೧. ಬಿಡಿಸಿರಿ: ೪.೫(ಯ—.೫)—೧.೨ಯ=.೮+.೨೫ಯ.

ಇದರಲ್ಲಿಯ ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ವ್ಯವಹಾರಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸುವದು ಒಂದು ರೂಢ ಮಾರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ,

$$\frac{೯}{೨}(ಯ - \frac{೧}{೨}) - \frac{೬}{೫}ಯ = \frac{೪}{೫} + \frac{೧}{೪}ಯ$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೯೦(ಯ - \frac{೧}{೨}) - ೨೪ಯ = ೧೬ + ೫ಯ$$

$$\therefore \quad ೯೦ಯ - ೪೫ - ೨೪ಯ = ೧೬ + ೫ಯ$$

$$\therefore \quad ೬೬ಯ - ೪೫ = ೧೬ + ೫ಯ$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ,

$$೬೬ಯ - ೫ಯ = ೧೬ + ೪೫$$

$$\therefore \quad ೬೧ಯ = ೬೧$$

$$\therefore \quad ಯ = ೧.$$

ಆದರೆ ಹೀಗೆ ಮಾಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆಯೇ? ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ನಮ್ಮ ಗುರುತು ವ್ಯವಹಾರಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಷ್ಟೇ ದೃಢವಾಗಿದ್ದರೆ ನೆಟ್ಟಗೆ ನಾವು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು.

$$೪.೫(ಯ - .೫) - ೧.೨ಯ = .೮ + .೨೫ಯ$$

$$\therefore\ ೪.೫ಯ - ೨.೨೫ - ೧.೨ಯ = .೮ + .೨೫ಯ$$

$$\therefore\ ೩.೩ಯ - ೨.೨೫ = .೮ + .೨೫ಯ$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೩.೩ಯ - .೨೫ಯ = .೮ + ೨.೨೫$

$$\therefore\ ೩.೦೫ಯ = ೩.೦೫$$

$$\therefore\ ಯ = ೧.$$

ಮೇಲಿನ ರೀತಿಗಿಂತ ಈ ರೀತಿಯು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದುದು ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾದದ್ದು ಎಂದು ಅನಿಸುವದಿಲ್ಲವೇ? ಕೇವಲ ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದು ಸುಮ್ಮನೆ ಅಂಜಬಾರದು.

ಇಲ್ಲವೆ $೪.೫(ಯ - .೫) - ೧.೨ಯ = .೮ + .೨೫ಯ$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೪೫(೧೦ಯ - ೫) - ೧೨೦ಯ = ೮೦ + ೨೫ಯ\ *$$

$$\therefore\ ೪೫೦ಯ - ೨೨೫ - ೧೨೦ಯ = ೮೦ + ೨೫ಯ$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೪೫೦ಯ - ೧೨೦ಯ - ೨೫ಯ = ೮೦ + ೨೨೫$

$$\therefore\ ೩೦೫ಯ = ೩೦೫$$

$$\therefore\ ಯ = ೧.$$

* ಇಲ್ಲಿ ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ದಶಾಂಶ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಎ. ಬ. $= ೪.೫(೧ - .೫) - ೧.೨ = ೪.೫ \times ೦.೫ - ೧.೨ = ೨.೨೫ - ೧.೨$
$= ೧.೦೫$ **ಬ. ಬ.** $= .೮ + .೨೫ = ೧.೦೫$]

ಉ. ೨. $೧.೨ರ - \frac{.೧೮ರ - .೦೨೫}{.೫} = .೪ರ + ೪.೪೫$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ವ್ಯವಹಾರಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$$೧\frac{೧}{೫}ರ - \frac{\frac{೯}{೫೦}ರ - \frac{೧}{೪೦}}{\frac{೧}{೨}} = \frac{೨}{೫}ರ + ೪\frac{೯}{೨೦}$$

$$\therefore\ ೧\frac{೧}{೫}ರ - \frac{೯}{೨೫}ರ + \frac{೧}{೨೦} = \frac{೨}{೫}ರ + ೪\frac{೯}{೨೦}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೧೨೦ರ - ೩೬ರ + ೫ = ೪೦ರ + ೪೪೫$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೧೨೦ರ - ೩೬ರ - ೪೦ರ = ೪೪೫ - ೫$

$$\therefore \quad ೪೪ರ = ೪೪೦$$

$$\therefore \quad ರ = ೧೦.$$

ಇಲ್ಲವೆ, $೧·೨ರ - \dfrac{·೧೮ರ - ·೦೨೫}{·೫} = ·೪ರ + ೪·೪೫$

$$\therefore \quad ೧·೨ರ - ·೩೬ರ + ·೦೫ = ·೪ರ + ೪·೪೫$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೧·೨ರ - ·೩೬ರ - ·೪ರ = ೪·೪೫ - ·೦೫$

$$\therefore \quad ·೪೪ರ = ೪·೪$$

$$\therefore \quad ರ = ೧೦.$$

ಇಲ್ಲವೆ, $೧·೨ರ - \dfrac{·೧೮ರ - ·೦೨೫}{·೫} = ·೪ರ + ೪·೪೫$

$$\therefore \quad ೧·೨ರ - ·೩೬ರ + ·೦೫ = ·೪ರ + ೪·೪೫$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೧೨೦ರ - ೩೬ರ + ೫ = ೪೦ರ + ೪೪೫$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $೧೨೦ರ - ೩೬ರ - ೪೦ರ = ೪೪೫ - ೫$

$$\therefore \quad ೪೪ರ = ೪೪೦$$

$$\therefore \quad ರ = ೧೦.$$

[ತಾಳೆ: ಎ. ಬ. $= ೧೨ - \dfrac{೧·೮ - ·೦೨೫}{·೫} = ೧೨ - ೩·೬ + ·೦೫ = ೮·೪೫.$

ಬ. ಬ. $= ೪ + ೪·೪೫ = ೮·೪೫.$]

ಉ. ೩. $·೦೧೧ಯ + \dfrac{·೦೦೧ಯ - ·೧೨೫}{·೬} = \dfrac{೫ - ಯ}{·೦೩} - ·೧೪೫$

$$\therefore \quad ·೦೧೧ಯ + \frac{·೦೧ಯ - ೧·೨೫}{೬} = \frac{೫೦೦ - ೧೦೦ಯ}{೩} - ·೧೪೫^{*}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$·೦೬೬ಯ + ·೦೧ಯ - ೧·೨೫ = ೧೦೦೦ - ೨೦೦ಯ - ·೮೭$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ·೦೬೬ಯ + ·೦೧ಯ + ೨೦೦ಯ = ೧೦೦೦ − ·೮೭ + ೧·೨೫

∴ ೨೦೦·೦೭೬ಯ = ೧೦೦೦·೩೮

∴ ಯ = ೫.

* ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಛೇದಗಳ ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ೧೦ರಿಂದ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದೆ. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪ ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ. ಎರಡನೆಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದಶಾಂಶ ಚಿನ್ಹ ಒಂದು ಸ್ಥಳ ಮುಂದೆ ಸರಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಅಂದರೂ ನಡೆಯುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೧. ೮·೭೩ಯ + ೮ = ೫·೨೩ಯ + ೧೫.

೨. ೧೪·೨೫ರ − ೨೩ = ೫೭ − ೫·೭೫ರ.

೩. ೯·೫ವ − ೭·೨೪ = ೧೨·೬೫ವ − ೧೦·೩೯.

೪. $\text{೩·೬ಸ} - \frac{\text{·೭೨ಸ} - \text{·೦೫}}{\text{·೫}} = \text{·೯ಸ} + \text{೬·೪}.$

೫. $\frac{\text{೨೮} + \text{·೫೬}}{\text{·೧೨೫}} - \frac{\text{೪೮} - \text{·೪೨}}{\text{·೨೫}} = \text{೬·೧೬}.$

೬. $\frac{\text{೯ಕ್ಷ} - \text{·೩೫}}{\text{·೨೫}} - \frac{\text{೪·೫} - \text{೮ಕ್ಷ}}{\text{·೫}} + \frac{\text{೨ಕ್ಷ} - \text{·೪೮}}{\text{·೧೨೫}} = \text{೨·೭೬}.$

೭. $\frac{\text{೪ಯ}}{\text{·೫}} - \frac{\text{೧}}{\text{·೦೫}} + \frac{\text{೪ಯ}}{\text{·೦೦೫}} - \frac{\text{೧}}{\text{·೦೦೦೫}} = \text{೦}.$

೮. $\text{·೨೫ರ} + \frac{\text{·೧೨೫ರ} - \text{·೨೫}}{\text{·೬}} - \frac{\text{೧·೫}}{\text{·೪}} \; \frac{\text{·೧೪ರ} - \text{·೬೭}}{\text{·೯}}.$

೯. $\text{·೭೨ಯ} + \frac{\text{·೦೬} + \text{·೦೪}}{\text{·೦೬}} - \frac{\text{೧·೨೩ಯ} - \text{೪}}{\text{೯}} = \text{೮·೫}.$

೧೦. $\frac{\cdot೩೧೫ವ+೩}{\cdot೩}+\frac{\cdot೨೭ವ-\cdot೪}{\cdot೦೮}-\frac{\cdot೩೭೫ವ-೪\cdot೫}{\cdot೦೫}+\frac{\cdot೦೫ವ-\cdot೨೨೭}{\cdot೦೧}=೮೦.$

೧೧. $\frac{೩ಸ+೩}{\cdot೦೩೨}+\frac{ಸ+೨}{\cdot೦೧೬}+\frac{೩ಸ+೯}{\cdot೦೬೪}=೩೦೦೦.$

೧೨. $\frac{೨೧ಯ-೩}{\cdot೦೧}-೪\left(\frac{೬ಯ}{\cdot೦೩}-\frac{೧-ಯ}{\cdot೦೨}\right)=೭೬೦೦.$

೧೩. $\frac{\cdot೧ರ+\cdot೭}{\cdot೦೩}\quad\frac{\cdot೩ರ}{\cdot೦೫}-\frac{\cdot೧ರ-\cdot೨}{\cdot೦೧}\quad\frac{\cdot೩ರ-೧\cdot೧}{\cdot೦೨}.$

೧೪. $\frac{\cdot೦೧ವ+\cdot೦೪}{೩}-\frac{\cdot೦೩-\cdot೦೭ವ}{೧೧}-\frac{\cdot೦೦೧}{\cdot೨}=\cdot೦೨+\frac{\cdot೦೨ವ}{೮}.$

೧೫. $\frac{೨ಯ+೨\cdot೫}{೩}-\cdot೫\left\{೨(೭-೨ಯ)-\cdot೫\right\}=\frac{\cdot೨೫(೮ಯ-೭)}{೩}.$

೧೬. $\frac{೭ಯ-೪}{೩}+\frac{೫ಯ+೧}{೨}=೮\frac{೫}{೬}.$ ೧೭. $\frac{೬ಜ+೯}{೩೬}=೩\frac{೧}{೮}-\frac{೪ಜ-೫}{೨೪}.$

೧೮. $\frac{ಯ-೪}{೮}-\frac{೨ಯ+೧}{೧೨}+\frac{೪ಯ-೬}{೩}=೦.$

೧೯. $\frac{೧೦-ರ}{೧೦}-\frac{೧೧+ರ}{೫}=೫+\frac{ರ}{೫}.$

೨೦. $(೮ವ-೩)(೪ವ+೩)+೬=೨(೪ವ-೫)^{೨}-೭.$

೨೧. $\frac{೬ಯ-೧}{೪}-\frac{೧+೩ಯ}{೬}+\frac{೬ಯ-೧}{೧೨}=೦.$

೨೨. $\frac{೨(೨ಸ+೩)}{೧೫}+\frac{ಸ}{೬}-\frac{೩ಸ+೨}{೧೦}-\frac{ಸ}{೧೨}=೦.$

೨೩. $೫\frac{೧}{೩}-\frac{೧}{೬}(೨ಯ-೧)=\frac{೨}{೩}(ಯ+೮)-\frac{ಯ}{೩}.$

೨೪. $\frac{೧}{೨}\left(ರ-\frac{೧}{೩}\right)+\frac{೧}{೫}\left(ರ-\frac{೧}{೬}\right)=\frac{೧೧}{೧೫}\left(ರ-\frac{೧}{೧೧}\right).$

೨೫. $\frac{೮ವ - ೯}{೨೭} - \frac{೫ವ + ೬}{೧೮} + \frac{೧೧ವ + ೨೪}{೩೬} = ೦.$

೨೬. $\frac{೫}{೨}(೩ಯ - ೫) + \frac{೯ಯ}{೧೪} - \frac{೨}{೩}(೭ಯ - ೧) = ೧೨\frac{೧}{೨}.$

೨೭. $\frac{೪}{೩}(೫ರ - \frac{೩}{೫}) - \frac{೨}{೫}(೨ರ + \frac{೫}{೮}) = ೨೦\frac{೧೯}{೨೦}.$

೨೮. $\frac{೨(ವ - ೨)}{೩} - \frac{೫ - ೭ವ}{೪} = \frac{೮ - ೯ವ}{೬}.$

೨೯. $\frac{೧}{೧೫}(೨ಯ - ೫) - \frac{೧}{೧೦}(೪ಯ - ೬\frac{೧}{೩}) + \frac{೧}{೫}(\frac{೧}{೨} + ಯ) = ೦.$

೩೦. $\cdotp೫(೨ರ - \cdotp೮) - \cdotp೮(೩ರ - \cdotp೭) + \cdotp೨೫(೫ರ - \cdotp೧) = ೦.$

೩೧. $\frac{೮(೨ವ - ೧)}{೫} - \frac{೧೪(ವ - ೧)}{೩} = \frac{೪ವ - ೫}{೪}.$

೩೨. $೩ಯ - \frac{೧}{೨} - \frac{೪}{೯}(ಯ - ೧) = \frac{೮ಯ - ೩}{೪}$

ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಸಮಮಾನಿಕ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಯಾಮಿಕ) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

೧.

೨.೧. ಉ. ೧. ಒಂದು ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ಒಂದು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ೩। ರೂ. ಇದ್ದು, ೩ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೧೦ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ೧೫ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೇನು ?

ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ಯ ರೂ. ಗಳಿದ್ದರೆ, ಚಹದ ದರವು (೩$\frac{೧}{೪}$ – ಯ) ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಮೂರು ರತ್ತಲು ಚಹದ ಬೆಲೆಯು ೩ (೩$\frac{೧}{೪}$–ಯ) ರೂ. ಇದ್ದು, ಹತ್ತು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆಯ ಬೆಲೆಯು ೧೦ಯ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ೩ (೩$\frac{೧}{೪}$ – ಯ) + ೧೦ಯ = ೧೫

∴ $\frac{೩೯}{೪}$ – ೩ಯ + ೧೦ಯ = ೧೫

∴ ೭ಯ = ೫$\frac{೧}{೪}$ ಅಥವಾ ಯ = $\frac{೩}{೪}$.

∴ ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೨ **ಆಣೆಗೆ** ರತ್ತಲು ಮತ್ತು ಚಹದ ದರವು ೨$\frac{೧}{೨}$ **ರೂ.** ರತ್ತಲು.

ಉ. ೨. ನಾಲ್ಕು ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ಒಂದು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೧೧ ರೂ. ೬ ಆ. ಇದ್ದು ೭ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೪ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೨೧ ರೂ. ೧೪ ಆ. ಆಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೇನು ?

ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ಒಂದು ರತ್ತಲಿಗೆ ಯ ರೂ. ಗಳೆಂದು ತಿಳಿದರೆ, ೪ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಬೆಲೆಯು (೧೧$\frac{೩}{೮}$ – ಯ) ರೂ. ಆಗುವದು, ಅಂದರೆ ಚಹದ ರತ್ತಲಿನ ದರವು $\frac{೧}{೪}$(೧೧$\frac{೩}{೮}$– ಯ) ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ೭ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಬೆಲೆಯು $\frac{೭}{೪}$ (೧೧$\frac{೩}{೮}$ – ಯ) ರೂ. ಆಗುವದು ಮತ್ತು ೪ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆಯ ಬೆಲೆಯು ೪ಯ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{೭}{೪}$ (೧೧$\frac{೩}{೮}$ – ಯ) + ೪ಯ = ೨೧$\frac{೭}{೮}$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೭(೧೧\frac{೩}{೮} - ಯ) + ೧೬ಯ = ೮೭\frac{೧}{೨}$

$\therefore \quad ೭೯\frac{೫}{೮} - ೭ಯ + ೧೬ಯ = ೮೭\frac{೧}{೨}$

$\therefore \quad ೯ಯ = ೭\frac{೭}{೮}$ ಅಥವಾ $ಯ = \frac{೭}{೮}$.

$\therefore$ ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೪ ಆ. ರತ್ತಲು ಮತ್ತು ಚಹದ ದರವು $\frac{೧}{೪}(೧೧\frac{೩}{೮}-\frac{೭}{೮})$ ರೂ. ಅಂದರೆ $(\frac{೧}{೪} \times ೧೦\frac{೧}{೨})$ ರೂ. **ಅಂದರೆ ೨ ರೂ. ೧೦ ಆ. ರತ್ತಲು.**

ಉ. ೩. ನಾಲ್ಕು ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ಮೂರು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೧೧ ರೂ. ೬ ಆ. ಇದ್ದು, ಐದು ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ಹನ್ನೆರಡು ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ೧೯ ರೂ. ೬ ಆ. ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೇನು?

ಸಕ್ಕರೆಯ ರತ್ತಲಿನ ದರವು ಯ ರೂ. ಗಳೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ, ೩ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆಯ ಬೆಲೆಯು ೩ಯ ರೂ. ಆಗುವದು, ಆದುದರಿಂದ ೪ ರತ್ತಲು ಚಹದ ಬೆಲೆಯು $(೧೧\frac{೩}{೮}-೩ಯ)$ ರೂ. ಆಗುವದು ಮತ್ತು ಚಹದ ರತ್ತಲಿನ ದರವು $\frac{೧}{೪}(೧೧\frac{೩}{೮} - ೩ಯ)$ ರೂ. ಆಗುವದು.

ಆದುದರಿಂದ, $\therefore \frac{೫}{೪}(೧೧\frac{೩}{೮} - ೩ಯ) + ೧೨ಯ = ೧೯\frac{೩}{೮}$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೫(೧೧\frac{೩}{೮} - ೩ಯ) + ೪೮ಯ = ೭೭\frac{೧}{೨}$

$\therefore \quad ೫೬\frac{೭}{೮} - ೧೫ಯ + ೪೮ಯ = ೭೭\frac{೧}{೨}$

$\therefore \quad ೩೩ಯ = ೨೦\frac{೫}{೮} = \frac{೧೬೫}{೮}$ ಅಥವಾ $ಯ = \frac{೫}{೮}$.

$\therefore$ ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೦ ಆ. ಮತ್ತು ಚಹದ ದರವು $\frac{೧}{೪}(೧೧\frac{೩}{೮}-೩\times\frac{೫}{೮})$ ರೂ., ಅಂದರೆ $\frac{೧}{೪}(೧೧\frac{೩}{೮} - ೧\frac{೭}{೮})$ ರೂ., ಅಂದರೆ $(\frac{೧}{೪} \times ೯\frac{೧}{೨})$ ರೂ., ಅಂದರೆ $೨\frac{೩}{೮}$ **ರೂ., ಅಂದರೆ ೨ ರೂ. ೬ ಆ.**

ಉ. ೪. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣದೊಳಗಿನ ಕೆಲವನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ೫ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟನು, ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ೨೧೫ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ಸಿಗಹತ್ತಿತು. ಮೊದಲನೆಯ ಹಣವನ್ನು ೫ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಅವನು ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವನ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೦೦ ರೂ. ಗಳಿಂದ

ಹೆಚ್ಚು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದನು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಯ ರೂ. ಇಟ್ಟಿದ್ದನೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಆ ಠೇವಿನ ಮೂಲಕ ಸಿಗುವ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{ಯ}{೨೫}$ ರೂ. ಇರುವದು. ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೧೫೦ ರೂ. ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಎರಡನೇ ಠೇವಿನಿಂದ ಸಿಗುವ ಉತ್ಪನ್ನವು $(೨೧೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. ಇರುವದು. ಈ ಠೇವು ೫ ದರದಲ್ಲಿ ಇದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಅದು $೨೦\ (೨೧೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. ರಕಮಿನದಿರುವದು. ಈಗ ಯ ರೂ. ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಡದೆ ೫ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{ಯ}{೨೦}$ ರೂ. ಬರುತ್ತಿತ್ತು ಮತ್ತು $೨೦\ (೨೧೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. ೫ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಡದೆ ೪ ದರದ ಠೇವಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಆ ರಕಮಿನ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{೨೦}{೨೫}\ (೨೧೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ., ಅಂದರೆ $\frac{೪}{೫}\ (೨೧೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಈಗ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೩೫೦ ರೂ. ಬರುತ್ತಿತ್ತು ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ

$$\frac{ಯ}{೨೦} + \frac{೪}{೫}\left(೨೧೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫}\right) = ೨೩೫೦$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$ಯ + ೧೬\left(೨೧೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫}\right) = ೪೭೦೦೦$$

$$\therefore\quad ಯ + ೩೪೪೦೦ - \frac{೧೬}{೨೫}ಯ = ೪೭೦೦೦$$

$$\therefore\quad \frac{೯ಯ}{೨೫} = ೧೨೬೦೦$$

$$\therefore\quad \frac{ಯ}{೨೫} = ೧೪೦೦$$

$$\therefore\quad \mathbf{ಯ} = ೩೫೦೦೦$$

ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ರಕಮು $= ೨೦\ (೨೧೫೦ - \frac{ಯ}{೨೫})$ ರೂ. $=$ $೨೦\ (೨೧೫೦ - ೧೪೦೦)$ ರೂ. $= (೨೦ \times ೭೫೦)$ ರೂ. $=$ **೧೫೦೦೦ ರೂ.**

∴ ೩೫೦೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೧೫೦೦೦ ರೂ. ಇವು ಆ ಎರಡು ರಕಮುಗಳು.

೨.೨. ಮೇಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಯಾವದಾದರೂ ಒಂದು (ಆದರೆ ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅನುಕೂಲವಿರುವ) ಅಜ್ಞಾತಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಯ ಈ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮಾಡಿ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಬೇರೆ ಸಂಗತಿಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ. ಆದರೆ ನಾವು ಈ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವಾ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಮಾರ್ಗದಂತೆಯೇ ಹೋಗಿ ಅದನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೊಂದು ಅನುಕೂಲವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಉ. ೫. ಒಂದು ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ೬ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೬ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದೋ ಅದು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೯ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

ಇಂಥ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಪರಿಚಯವು ಹಿಂದಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಕರಣದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಆಗಿದೆ; ಆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಎಕ್ಕಂಸ್ಥಾನದ ಇಲ್ಲವೆ ದಹಂಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು "ಯ" ದಿಂದಾಗಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವದಾದರೂ **ಅವ್ಯಕ್ತದಿಂದ** ಮಾಡಿ ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು, ಉಳಿದ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ, ನಾವು ಆ **ಅವ್ಯಕ್ತದ** ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವೆವು. ಆದರೆ ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾಗೆ ಮಾಡಿ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದರಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷ-ವೇನೂ ಸಹಾಯವು ದೊರೆಯುವದೆಂದು ತೋರುವದಿಲ್ಲ. ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದಿಂದ ಮಾಡಿ (ಇಲ್ಲವೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡದೆಯೂ ಅಲ್ಲಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ) ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಿದರೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವು-ದೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರಬಹುದು. ಆದರೆ ಆ

ಮಾರ್ಗವು ತಿಳಿಯಲು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲವೆಂದು ನಾವು ಬೇರೊಂದು ಸುಲಭ ದಾರಿಯಿಂದ ಹೋಗುವಾ.

ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳದು. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ **ವರ್ಣಗಳಿಂದ** ಮಾಡಿದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಅವುಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಬೈಜಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಬರೆಯ-ಬಹುದು. ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವ, ಇವು ಇರುತ್ತವೆಂದು ನಾವು ಕಲ್ಪಿಸುವಾ. ಹಾಗಾ-ದರೆ **ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು** ೧೦ಯ + ವ ಆಗುವದು, ಯ + ವ ಇದು ಅಂಕೆಗಳ **ಬೇರೀಜು** ಆಗುವದು ಮತ್ತು **ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು** ೧೦ವ + ಯ ಆಗುವದು. ಈಗ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ೬ ಪಟ್ಟಿನಗಿಂತ ೬ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಇದರ ಬೈಜಿಕ ಭಾಷಾಂತರವು ೧೦ಯ + ವ = ೬ (ಯ + ವ) + ೬.

ಮತ್ತು ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಸಿದ್ಧವಾದ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿನಗಿಂತ ೯ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನದ ಬೈಜಿಕ ಭಾಷಾಂತರವು ೧೦ವ + ಯ = ೪ (ಯ + ವ) + ೯.

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಎದುರು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವವು. ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣ-ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ **ಆ ಎರಡೂ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು** (ಬೆಲೆಗಳನ್ನು) ಹೇಳಬಹುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

೨·೩. ಈಗ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಹಿಂದೆ ಹೊರಳಿ ನೋಡುವಾ. ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದ ೨·೧ ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಕ್ಕರೆ ಮತ್ತು ಚಹದ ಒಂದೊಂದು ಪೌಂಡಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ನಮಗೆ ಹೇಳಿದೆ. ಆ ದರಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ನಾವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ

ಯ ರೂ. ಮತ್ತು ವ ರೂ. ಎಂದು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವು **ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ**

$$ಯ + ವ = ೩\tfrac{೧}{೪}, \quad ೧೦ಯ + ೩ವ = ೧೫; \qquad (ಉ. ೧.)$$

$$ಯ + ೪ವ = ೧೧\tfrac{೩}{೮}, \quad ೪ಯ + ೭ವ = ೨೧\tfrac{೩}{೮}; \qquad (ಉ. ೨.)$$

ಮತ್ತು $೩ಯ + ೪ವ = ೧೧\tfrac{೩}{೮}, \quad ೧೨ಯ + ೫ವ = ೧೯\tfrac{೩}{೮}; \qquad (ಉ. ೩.)$

ಹೀಗೆಯೇ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು ಅಲ್ಲವೇ ?

ಮತ್ತು ೪ ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ೪ ದರದ ಠೇವು ಯ ರೂ. ಗಳದು ಮತ್ತು ೫ ದರದ ಠೇವು ವ ರೂ. ಗಳದು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ

$$\frac{ಯ}{೨೫} + \frac{ವ}{೨೦} = ೨೧೫೦, \quad \frac{ಯ}{೨೦} + \frac{ವ}{೨೫} = ೨೩೫೦ \qquad (ಉ. ೪.)$$

ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು ಅಲ್ಲವೇ ?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಎದುರು **ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ** ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ **ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳು** ಇರುವವು. **ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು** ಬಿಡಿಸಿ ಅದರೊಳಗಿನ **ಎರಡೂ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು** (ಬೆಲೆಗಳನ್ನು) ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನಾವು ನೋಡುವಾ.

೨.

೨·೪. ಉ. ೧. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯು ೪ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಬೇರೀಜು ೧೮ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೇಲಿಂದ,

ಯ − ವ = ೪............(೧) ಮತ್ತು ಯ + ವ = ೧೮............(೨)

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಮಗೆ ಸಿಗುವವು.

ಕೇವಲ ಸಮೀಕರಣ (೧)ರ ವಿಷಯವಾಗಿಯೇ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಯ ಮತ್ತು ವ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಕಂಡು ಬರುವವು. ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ

ಯ = ಇದ್ದರೆ	೫	೬	೭	೮	೯	೧೦	**೧೧**	೧೨	೧೩	೧೪	ಇ.
ವ =	೧	೨	೩	೪	೫	೬	**೭**	೮	೯	೧೦	ಇ.

ಹಾಗೆಯೇ ಕೇವಲ ಸಮೀಕರಣ (೨) ನೆಯದರ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಯ ಮತ್ತು ವ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಎಷ್ಟೋ ಜೋಡಿಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವವು.

ಯ = ಇದ್ದರೆ	೬	೭	೮	೯	೧೦	**೧೧**	೧೨	೧೩	೧೪	೧೫	ಇ.
ವ =	೧೨	೧೧	೧೦	೯	೮	**೭**	೬	೫	೪	೩	ಇ.

ಈಗ ನಮಗೆ ಯ ಮತ್ತು ವ ಇವುಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಅವು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ **ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ** ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವಂಥವು; ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ **ಸಾಧಾರಣವಿರುವ** ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಯ = ೧೧, ವ = ೭ ಇದು ಆ ಜೋಡಿಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ **೧೧** ಮತ್ತು **೭** ಇವು ಆ **ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.**

೨·೫. ಈಗ ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವ ಜೋಡಿಯು ಸಾಧಾರಣವಿದೆ ಎಂದು ನೋಡುವದು ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ವೇಳೆಯ ಬಹಳ ಅಪವ್ಯಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬೇಗನೆ ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನಾವು ನೋಡಬೇಕು. **ಎರಡು ಸಮಾನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ) ಸಮಾನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು) ಕೂಡಿಸಿ ಬಂದ ಬೇರೀಜುಗಳು ಸರಿ ಇರುತ್ತವೆಂದು** ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಯ – ವ ಮತ್ತು ೪ ಸಮಾನವಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ + ವ

ಮತ್ತು ೧೮ ಇವು ಸಮಾನವಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದ ಮೇಲೆ ಯ – ವ ಮತ್ತು ಯ + ವ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೪ ಮತ್ತು ೧೮ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿ ಇರಬೇಕು. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯು ಕೆಳಗೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಂದು ನೋಡಿರಿ.

ಯ – ವ = ೪..............(೧)
ಯ + ವ = ೧೮..............(೨)

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿ

೨ಯ = ೨೨ ಅಂದರೆಯೇ **ಯ = ೧೧.**

ಸಮೀಕರಣ (೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ **೧೧** ಹಾಕಿದರೆ, **ವ = ೭.**

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ (೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ **ಬೇರೀಜನ್ನು** ಮಾಡಿದ ಮೂಲಕ ವ ದ **ಲೋಪ**ವಾಯಿತು ಮತ್ತು ಯ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಮಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬಂದಿತು ಮತ್ತು ಈ ಯ ದ ಬೆಲೆಯು (೧) ಅಥವಾ (೨) ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ವ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ.

[(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವದು ಅಂದರೆ ಸಮೀಕರಣ (೧) ರ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (೨) ರ ಎಡಬದಿಯನ್ನೂ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬಲಬದಿಯನ್ನೂ ಕೂಡಿಸುವದಿರುತ್ತದೆ. (೧) ರೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯುವದೆಂದರೆ (೧) ನೆಯದರ ಎಡಬದಿಯೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದರ ಎಡಬದಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯಿಂದ ಬಲಬದಿಯನ್ನು ಕಳೆಯುವದಿರುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೂ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು (ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಿಸುವದು) ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು (ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಿಸುವದು) ಇರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗುವ ಬೇರೀಜುಗಳು, ವಜಾಬಾಕಿಗಳು, ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರಗಳು ಸರಿಯಿರುತ್ತವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆ.]

ಉ. ೨. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ೫ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಬೇರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ೭ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೫೯ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೊದಲನೆಯದರ ೮ ಪಟ್ಟಿನೊಳಗಿಂದ ಎರಡನೆಯದರ ೭ ಪಟ್ಟನ್ನು ಕಳೆದರೆ ೩೬ ಶೇಷವು ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ರ ಎಂದು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ವ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ,

೫ರ + ೭ವ = ೧೫೯............(೧)
ಮತ್ತು ೮ರ – ೭ವ = ೩೬............(೨)

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ೧೩ರ = ೧೯೫

ಇಲ್ಲವೆ ರ = ೧೫.

(೧) ರಲ್ಲಿ ರ ದ ಬದಲಾಗಿ ೧೫ ಇಟ್ಟರೆ, ೭೫ + ೭ವ = ೧೫೯

∴ ೭ವ = ೮೪, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೧೨.

∴ ೧೫ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಇದರಂತೆಯೇ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩.

೧. ೫ಯ−೩ರ= ೧, ೮ಯ+೩ರ=೨೫.	೨. ೮ಯ−೫ವ=೧೪, ೯ಯ+೫ವ=೩೭.	೩. ೧೬ರ+೭ಲ=೩೭, ೨೫ರ−೭ಲ= ೪.
೪. ೯ವ −೪ಸ=೫೮, ೫ವ +೪ಸ=೮೨.	೫. ೩ಯ+೮ರ =೧೩, ೫ಯ−೮ರ =−೨೧.	೬. ೨ಯ−೫ಸ =೫೦, ೪ಯ+೫ಸ =೧೦.
೭. ೯ವ −೫ಸ=೧೭, ೮ವ +೫ಸ=೩೪.	೮. ೨೫ಲ−೮ವ=−೧೪, ೩ಲ+೮ವ=೭೦.	೯. ೧೧ಯ+೬ಲ=೯೧, ೭ಯ−೬ಲ=−೧.
೧೦. ೧೩ರ−೪ಸ=೮೮, ೫ರ+೪ಸ=೫೬.	೧೧. ೪ಯ−೧೧ವ=೧೯, ೭ಯ+೧೧ವ=೩.	೧೨. ೮ಯ−೫ರ =೧೩, ೯ಯ+೫ರ =೪.

೨೬. ಉ. ೩. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ೫ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೭ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೨೪ ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯದರ ೨ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ೭ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೦೦ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ವ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ೫ಯ + ೭ವ = ೧೨೪............(೧)

ಮತ್ತು ೨ಯ + ೭ವ = ೧೦೦............(೨)

ಎರಡು ಸಮಾನ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿಂದ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿಂದ) ಸಮಾನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು) ಕಳೆದರೆ ಬರುವ ಶೇಷಗಳು ಸರಿ ಇರುತ್ತವೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಅದರಂತೆ

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ (೧) ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೆ ವ ದ **ಲೋಪ**ವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ೩ಯ = ೨೪, ಅಂದರೆಯೇ ಯ = ೮ ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಈಗ (೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ೮ ಹಾಕಿದರೆ ೧೬ + ೭ವ = ೧೦೦, ಅಂದರೆ ೭ವ = ೮೪ ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೧೨.

∴ **೮ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವು ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.**

ಉ. ೪. ೮ ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ೧೫ ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣುಗಳು ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ೩ ರೂ. ೧೩ ಆ. ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ೮ ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ೯ ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣುಗಳು ೨ ರೂ. ೧೧ ಆ. ಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ದರವೆಷ್ಟು?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಲೆ ಸ ಆ. ಮತ್ತು ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಲೆ ಮ ಆ. ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ೮ಸ + ೧೫ಮ = ೬೧............(೧)

ಮತ್ತು ೮ಸ + ೯ಮ = ೪೩............(೨)

(೧) ನೆಯದೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ,

೬ಮ = ೧೮, ಇಲ್ಲವೆ **ಮ = ೩.**

ಮ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ, ೮ಸ + ೨೭ = ೪೩

∴ ೮ಸ = ೧೬, ಇಲ್ಲವೆ **ಸ = ೨.**

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ದರವು ೨ ಆ. ಮತ್ತು ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣಿನ ದರವು ೩ ಆ.

ಇದರಂತೆಯೇ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪.

೧. ೮ಯ+೫ವ=೩೪, ೩ಯ+೫ವ=೧೯.

೨. ೨೩ಯ+೧೮ರ=೫೯, ೫ಯ+೧೮ರ=೪೧.

೩. ೧೯ರ−೩ಸ=೧೦, ೧೦ರ−೩ಸ= ೧.

೪. ೮ಪ+೨೧ಮ=೪೬, ೮ಪ+೧೯ಮ=೪೨.

೫. ೧೪ಯ+ ೫ರ=೪೨, ೧೪ಯ+ ೮ರ=೬೩.

೬. ೧೯ಲ−೪ವ=−೨, ೨೧ಲ−೪ವ= ೨.

೭. ೮ವ−೩ಸ=೪೯, ೧೧ವ−೩ಸ=೬೪.

೮. ೧೭ದ+೧೩ನ=೬೦, ೨೮ದ+೧೩ನ=೮೨.

೯. ೫ಯ+೧೪ರ=೪೩, ೫ಯ+ ೮ರ=೩೧.

೧೦. ೨೩ಪ−೧೪ಮ=೫೯, ೧೫ಪ−೧೪ಮ=೧೯.

೧೧. ೯ಯ−೭ವ=೨೫, ೩ಯ−೭ವ=೧೩.

೧೨. ೧೨ಲ+೧೧ವ=೨೮, ೧೬ಲ+೧೧ವ=೩೦.

೨·೭. ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ **ಬೇರೀಜನ್ನು** ಮಾಡುವದು ಸುಲಭವೆನಿಸುವದು ಅಲ್ಲಿ **ಬೇರೀಜನ್ನು** ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ **ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು** ಮಾಡುವದು ಸುಲಭವೆನಿಸುವದು ಅಲ್ಲಿ **ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನೂ** ಮಾಡಿ, ಮೊದಲು ಒಂದು **ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು** ಮಾಡಿದ ತರುವಾಯ **ಉಳಿದ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು** ತೆಗೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಈ ಬೆಲೆಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿ **ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು** ತೆಗೆದಿದೆ. ಆದರೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ **ಬೇರೀಜಿನಿಂದಾಗಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದಾಗಲಿ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು** ಮಾಡಲು ಬರುವಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವವೋ ? ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ,

ಪ. ೨·೩, ಉ. ೧ ರಲ್ಲಿ ಯ + ವ = ೩೩............(೧)

ಮತ್ತು ೧೦ಯ + ೩ವ = ೧೫............(೨)

ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಮ್ಮೆಲೆ **ಬೇರೀಜಿನಿಂದಾಗಲಿ** ಅಥವಾ **ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದಾಗಲಿ** ನಮಗೆ **ಯಾವ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನೂ ಮಾಡಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ.** ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನಂದರೆ:— (೧) ರಲ್ಲಿ ಯ ದ ಸಹಗುಣಕವು ೧೦ ಇದ್ದರೆ ಅಥವಾ ವ ದ ಸಹಗುಣಕವು ೩ ಇದ್ದರೆ **ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ** ಆ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಿ ಬೇರೆ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. **ಸಮಾನ ರಾಶಿಯನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು) ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸರಿಯಿರುತ್ತವೆ.** ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ, (೧) ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೩ಯ+೩ವ=೯೩............(೧ ಅ) ೨ ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೧ ಅ) ವನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ೭ಯ=೫೬ ಇಲ್ಲವೆ ಯ=೮ ಮತ್ತು ಯ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗಿ ವ=೨೩.

ಯ = ೮; ವ = ೨೩.

ಅದೇ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ **ಉ. ೨.** ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ಯ + ೪ವ = ೧೧$\frac{೩}{೮}$............(೧)

ಮತ್ತು ೪ಯ + ೭ವ = ೨೧$\frac{೭}{೮}$............(೨)

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ (೧) ನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ಯ ದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ (೧)ನ್ನು ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

೪ಯ + ೧೬ವ = ೪೫$\frac{೧}{೨}$............(೧ಅ)

ಮತ್ತು (೧ ಅ) ದೊಳಗಿಂದ (೨) ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

೯ವ = ೨೩$\frac{೫}{೮}$, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೨$\frac{೫}{೮}$.

ಮತ್ತು ವ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ

ಯ + ೧೦$\frac{೧}{೨}$ = ೧೧$\frac{೩}{೮}$, ಇಲ್ಲವೆ ಯ = $\frac{೭}{೮}$.

∴ ಯ = $\frac{೭}{೮}$; ವ = ೨$\frac{೫}{೮}$.

ಅದೇ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ **ಉ. ೩.** ನೆಯದೊಳಗಿನ ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

೩ಯ + ೪ವ = ೧೧$\frac{೩}{೮}$............(೧)

ಮತ್ತು ೧೨ಯ + ೫ವ = ೧೯$\frac{೩}{೮}$............(೨)

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ (೧) ನ್ನು ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ಯ ದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ವ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ (೧)ನ್ನು ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

೧೨ಯ + ೧೬ವ = ೪೫$\frac{೧}{೨}$............(೧ಅ)

ಮತ್ತು (೧ಅ) ದೊಳಗಿಂದ (೨)ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದು ೧೧ವ = ೨೬$\frac{೧}{೮}$, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೨$\frac{೩}{೮}$ ಮತ್ತು (೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ವ = ೨$\frac{೩}{೮}$ ಹಾಕಿ ೩ಯ + ೯$\frac{೧}{೨}$ = ೧೧$\frac{೩}{೮}$

∴ ೩ಯ = ೧$\frac{೭}{೮}$, ಇಲ್ಲವೆ ಯ = $\frac{೫}{೮}$.

ಯ = $\frac{೫}{೮}$; ವ = ೨$\frac{೩}{೮}$.

ಇದರಂತೆಯೇ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೫.

೧. ೨೫ಯ+೮ರ=೫೮, ೩ಯ+ರ =೭. **೨.** ೮ಯ+೩ರ=೩೦, ೫ಯ+ರ =೧೭. **೩.** ೯ಯ+೭ವ=೫೦, ೫ಯ+ವ =೨೨.

೪. ೧೪ಪ+೫ಮ=೫೨, ೫. ೪ಯ+೧೧ವ=೪೯, ೬. ೧೦ಪ−೩ಮ=೪೪,
೯ಪ+ಮ =೨೯. ಯ−೩ವ =−೫. ಪ+೮ಮ =೨೧.

೭. ೭ನ+೧೩ಮ=೪೭, ೮. ೫ಯ−೨೨ವ= ೩, ೯. ೧೨ರ−೫ಸ =೧೪,
೮ನ+ಮ =೨೬. ಯ−೪ವ = ೧. ೮ರ−ಸ =೧೪.

೧೦. ೩ಯ+೮ವ =೩೪, ೧೧. ೨೩ಪ+೨೧ಮ=೫೩, ೧೨. ೨೪ಯ+೧೧ರ=೨೩,
ಯ−೫ವ =−೪. ಪ−೩ಮ = ೧. ೧೬ಯ+ರ =೯.

೧೩. ೩ಪ+೭ಬ =೩೨, ೧೪. ೧೭ನ−೩ಪ =೯೪, ೧೫. ೨೨ಯ−೯ಲ=−೭,
ಪ−೮ಬ =−೧೦. ೭ನ−ಪ =೩೮. ೧೬ಯ−ಲ =೬.

೧೬. ೨೫ರ+೧೨ವ=೪೧, ೧೭. ೨೦ಯ+೭ರ=೧೧, ೧೮. ೯ಯ−೧೧ವ =೨೫,
೩೫ರ−ವ =೪. ೫ಯ+೮ರ=೯. ೨೬ಯ+೨ವ =೫.

೨·೮. ಈಗ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ೧೦ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೮ ರತ್ತಲು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳಿಗೆ ಹೋದ ವಾರದಲ್ಲಿ ೩೧ ರೂ. ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಈಗ ಚಹದ ದರವು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೦ ರಿಂದ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾದ ಮೂಲಕ ಅವೇ ಸರಕುಗಳಿಗೆ ೩೫ ರೂ. ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ರತ್ತಲಿನ ದರವು ಕಳೆದ ವಾರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟಿತ್ತು ?

ಚಹದ ಹಳೇ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ಯ ರೂ. ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ವ ರೂ. ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಹೊಸ ದರಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೧೧}{೧೦}$ಯ ರೂ. ಮತ್ತು $\frac{೫}{೪}$ ವ ರೂ. ಇರುವವು. ಆದುದರಿಂದ,

$$೧೦ಯ + ೮ವ = ೩೧ \ldots\ldots\ldots (೧)$$

$$ಮತ್ತು\ ೧೧ಯ + ೧೦ವ = ೩೫ \ldots\ldots\ldots (೨)$$

ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗಿನ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದು ಬಂದ ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪ ಮಾಡುವದಾದರೆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಹಗುಣಕವು ಒಂದೇ ಇರುವಂತೆ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಈಗ ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ವ ದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ (೧)ನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಮತ್ತು (೨)ನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕಾ-

ಗುವದು. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ವ ದ ಸಹಗುಣಕವು ೪೦ (೮ ಮತ್ತು ೧೦ ಇವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**) ಇರುವದು, ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಯ ದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ (೧) ನ್ನು ೧೧ ರಿಂದ (೨) ನ್ನು ೧೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಯ ದ ಸಹಗುಣಕವು ೧೧೦ (೧೦ ಮತ್ತು ೧೧ ಇವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**) ಬರುವದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದರೂ ಆಗುವದು. ಆದರೂ ಎರಡೂ ಮಾರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದದ್ದು, ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಗಳು ಸ್ವಲ್ಪ ದೊಡ್ಡವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ,

(೧)ನೆಯದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

೫೦ಯ + ೪೦ವ = ೧೫೫............(೧ಅ)

(೨)ನೆಯದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

೪೪ಯ + ೪೦ವ = ೧೪೦............(೨ಅ)

(೧ಅ) ದೊಳಗಿಂದ (೨ಅ) ವನ್ನು ಕಳೆದು

೬ಯ = ೧೫, ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೨½.

(೧) ರಲ್ಲಿ ಯ = ೨½ ವನ್ನು ಹಾಕಿ   ೨೫ + ೮ವ = ೩೧,

∴ ೮ವ = ೬, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೩/೪.

∴ ಚಹವು ೨½ ರೂ.ಗೆ ಒಂದು ರತ್ತಲು; ಸಕ್ಕರೆಯು ೧೨ ಆ. ಒಂದು ರತ್ತಲು.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು :

(೧)ನೆಯದರ ೧¼ ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದರೆ ೧೨½ಯ + ೧೦ವ = ೩೮¾....(೧ಅ)

೧೧ಯ + ೧೦ವ = ೩೫........(೨)

(೧ಅ) ದೊಳಗಿಂದ (೨) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ೧½ಯ = ೩¾, ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೨½.

ಉ. ೨. ಸುಧೀರನ ವಯಸ್ಸಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಸುಹಾಸನ ವಯಸ್ಸಿನ ೭ ಪಟ್ಟನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ೧೪೦ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಸುಧೀರನ ವಯಸ್ಸಿನ ೫ ಪಟ್ಟಿನೊಳಗಿಂದ ಸುಹಾಸನ ವಯಸ್ಸಿನ ೪ ಪಟ್ಟನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೨೨ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ವ ವರ್ಷಗಳು ಇದ್ದರೆ, ೪ಯ + ೭ವ = ೧೪೦............(೧)

ಮತ್ತು ೫ಯ − ೪ವ = ೨೨..............(೨)

(೧) ನೆಯದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

೧೬ಯ + ೨೮ವ = ೫೬೦.............(೧ಅ)

ಮತ್ತು (೨)ನೆಯದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

೩೫ಯ − ೨೮ವ = ೧೫೪............(೨ಅ)

(೧ಅ) ಮತ್ತು (೨ಅ) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿ,

೫೧ಯ = ೭೧೪, ಇಲ್ಲವೆ ಯ = **೧೪.**

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ = ೧೪ ಹಾಕಿ, ೫೬ + ೭ವ = ೧೪೦

∴ ೭ವ = ೮೪, ಇಲ್ಲವೆ ವ = ೧೨.

∴ **ಸುಧೀರನು ೧೪ ವರ್ಷದವನು, ಸುಹಾಸನು ೧೨ ವರ್ಷದವನು.**

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

೧. ೮ಯ+೩ರ=೧೪, ೫ಯ+೭ರ=೧೯.
೨. ೯ಯ+೫ವ=೨೩, ೪ಯ+೧೧ವ=೧೯.
೩. ೩ಪ−೮ಮ=೧, ೮ಪ+೫ಮ=೨೯.
೪. ೧೨ದ+೫ನ=೩೪, ೭ದ+೨ನ=೧೮.
೫. ೧೧ಯ+೩ವ=೪೫, ೯ಯ−೫ವ=೭.
೬. ೨೮ರ−೧೭ವ=೩೧, ೧೬ರ−೯ವ=೧೭.
೭. ೨೫ಪ−೧೩ಮ=−೧, ೧೮ಪ−೭ಮ=೩೨.
೮. ೧೨ಯ−೭ಸ=೮, ೧೦ಯ+೩ಸ=೪೨.
೯. ೯ಯ+೭ರ=೩೦, ೮ಯ−೫ರ=−೭.
೧೦. ೧೮ಮ−೧೧ವ=೧, ೨ಮ+೭ವ=೩೩.
೧೧. ೨೪ಯ+೭ವ=೪೩, ೧೫ಯ−೨ವ=−೫.
೧೨. ೪ಯ+೬ಲ=೧೧, ೯ಯ−೧೦ಲ=೧೩.
೧೩. ೩೬ವ−೫ಸ=−೪, ೩೦ವ+೨ಸ=೯.
೧೪. ೧೦ಯ−೩ರ=−೧೩, ೧೫ಯ+೨ರ=೧೩.
೧೫. ೨೬ಯ+೩ವ=೩೨, ೫ಯ−೨ವ=೧.
೧೬. ೮ಪ+೭ಮ=೧೬, ೧೨ಪ−೫ಮ=−೭.
೧೭. ೪ಯ+೯ವ=೧, ೧೮ಯ+೫ವ=−೩೧.
೧೮. ೫ಕ−೭ಗ=−೧, ೭ಕ+೩ಗ=−೨೭.

೧೯. ೩ಯ+೧೦ರ=−೫, ೨೦. ೮ನ+೩ವು =೪೨, ೨೧. ೧೪ರ−೧೧ಸ=೧೫,
೪ಯ+೧೩ರ=−೭. ೬ನ−೫ವು =೪೬. ೨೨ರ−೧೫ಸ =೧೯.

ಹೋದ ವರ್ಷ ಮತ್ತು ಈ ವರ್ಷದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಿಡಿಸಿದೆವೋ ಅವುಗಳ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕಿಂತ ಈಗ ನಾವು ಬಿಡಿಸತೊಡಗಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪವು ಸ್ವಲ್ಪ ಭಿನ್ನವಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಪ್ರಕಾರದ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತವಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ನಮಗೆ ಆ ಸಮೀಕರಣದೊಳಗಿನ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಹೊಸ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ್ಗೆ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿ ಬರುತ್ತವೆಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆ.

ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತವಿರುವಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ **ಏಕವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆಯು** ಇರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗೆ ನಾವು ನೋಡಿದ ಏಕವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೂ ಒಂದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಸುಬೋಧ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದ ತರುವಾಯ ನಮಗೆ ಅಯ + ಹ = ೦ ಇಲ್ಲವೆ ಅಯ = ಮ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬಂದಿದೆ. ಅಂದರೆ ಆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಯ ದ ಮೊದಲನೇ ಘಾತವೇ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ **ಏಕವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಸಾದಾ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂಬ** ಹೆಸರಿನಿಂದಲೂ ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಇದೇ ಹೆಸರು ವಿಶೇಷ ಪರಿಚಿತವಾದದ್ದು. $೬ಯ^{2} + ಯ - ೧೫ = ೦$ ಇಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತವಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಏಕವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಏಕಘಾತ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಅದರಲ್ಲಿ ಯದ ಎರಡನೆಯ ಘಾತವಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು **ಏಕವರ್ಣ ದ್ವಿಘಾತ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ.**

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಪರಿಚಿತವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದ್ವಿವರ್ಣವಿದ್ದವಲ್ಲದೆ ಏಕಘಾತದವಿರುತ್ತವೆ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳ (ಬೆಲೆಗಳ) ಅಸಂಖ್ಯ ಜೋಡಿಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ಸರಿ ಇರುವ ಎರಡು ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಸರಿ ಬರುವಂಥ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಒಂದೇ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು (ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಒಂದು ಬೆಲೆಯು) ಇರುತ್ತದೆ.

ಮಧ್ಯಾಹ್ನ ೧೨ ಘಂಟೆಗೆ ಒಂದು ಮೋಟಾರು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಪುಣೆಗೆ ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೨೬ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಪುಣೆಯಿಂದ ಮುಂಬಯಿ ಕಡೆಗೆ ೨೪ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಲು ಹೊರಟವು. ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ೧೨೦ ಮೈಲುಗಳಿದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಎಷ್ಟು ಘಂಟೆಗೆ ಮತ್ತು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಅವು ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವವು, ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ನಮ್ಮ ಎದುರು ಇರುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಪುಣೆಯ ಕಡೆಗೆ ಹೋಗುವ ಗಾಡಿಯು ಕ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ೨೬ಕ ಮೈಲು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

∴ ಕ ತಾಸುಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ೨೬ಕ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.

∴ ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅ=೨೬ಕ ಈ ಸೂತ್ರವು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಆ ಗಾಡಿಯು ಯಾವಾಗ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಪುಣೆಯಿಂದ ಮುಂಬಯಿಕಡೆಗೆ ಹೋಗುವ ಗಾಡಿಯು ಕ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ೨೪ಕ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

∴ ಕ ತಾಸುಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ (೧೨೦–೨೪ಕ) ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.

∴ ಎರಡನೇ ಗಾಡಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅ=೧೨೦–೨೪ಕ ಈ ಸೂತ್ರವು ಯಾವಾಗ್ಗೆ ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಆ ಗಾಡಿಯು ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳ ಪ್ರವಾಸದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವೆರಡೂ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವವೋ ಇಂಥ ಒಂದು ಕ್ಷಣವು ಬರುವದು. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಅಂತರವು (ಅ) ಒಂದೇ ಇರುವದು. ಆ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಆ ಅಂತರವಿರಬೇಕಾದರೆ ಅ=೨೬ ಕ ಮತ್ತು ಅ=೧೨೦–೨೪ಕ ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಿಜವಿರುವವು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ ಕದ ಬೆಲೆಯು (೨ ೨/೫) ಇದ್ದಾಗ್ಗೆ ಅದ ಬೆಲೆಯು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ (೬೨ ೨/೫) ಇರುವದು. ಅಂದರೆಯೇ ಕ ಮತ್ತು ಅ ಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ನಿಜವಿರುವವು. ಇಂಥ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ನಾವು ಸಮಮಾನಿಕ (ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಯಾಮಿಕ) ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪, ೫, ಮತ್ತು ೬ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು **ಸಮಮಾನಿಕ** (ಇಲ್ಲವೆ **ಸಮಯಾಮಿಕ**) ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈ ಜೋಡಿಯು ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳದಿರುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಮರ್ಯಾದಿತವಿಲ್ಲ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಇಲ್ಲವೆ ಅನೇಕ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳಿರಬಹುದು. ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಯಾವದೇ ಘಾತವಿರಬಹುದು. ಯಾವ ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳು (ಮಾನಗಳು) ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಅವೆಲ್ಲವುಗಳಿಗೂ ಸರಿ ಬರುತ್ತವೆಯೋ ಅಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ **ಸಮಮಾನಿಕ** (ಇಲ್ಲವೆ **ಸಮಯಾಮಿಕ**) ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡು ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಯಾವ ರೀತಿಯನ್ನು ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆವೋ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪ ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅನುಕೂಲ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನಾಗಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನಾಗಲಿ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇದೇ ಭಾಗವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಹತ್ವದ್ದು. ಆದುದರಿಂದ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಈ ರೀತಿಗೆ **ಯೋಗವಿಯೋಗ ರೀತಿ** ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. **ಯೋಗ** ಅಂದರೆ **ಬೇರೀಜು**, ಮತ್ತು **ವಿಯೋಗ**ವೆಂದರೆ **ವಜಾಬಾಕಿ**.

೩.

೨·೯. ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ **ಯೋಗವಿಯೋಗ** ರೀತಿಯ ಹೊರತು **ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು** ಬಿಡಿಸುವ ಇನ್ನೂ ಒಂದೆರಡು ರೀತಿಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಾಡುವಾ. ವಿಚಾರದಗೋಸ್ಕರ ಹಿಂದೆ **ಪ.** ೨·೭ ರಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಯ + ವ = ೩೪ ....(೧) ಮತ್ತು ೧೦ಯ + ೩ವ = ೧೫....(೨) ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. (೧)ದರ ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ವ = ೩೪ − ಯ ಮತ್ತು ವ ದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೨) ರಲ್ಲಿ ವ ದ ಬದಲಾಗಿ ಬರೆದರೆ ೧೦ಯ + ೩(೩೪ − ಯ) = ೧೫.

$$\therefore\ ೭\text{ಯ} = ೫\tfrac{೧}{೪}\ \text{ಇಲ್ಲವೆ}\ \text{ಯ} = \tfrac{೩}{೪}.$$

$$\text{ಮತ್ತು}\qquad \text{ವ} = ೩\tfrac{೧}{೪} - \tfrac{೩}{೪} = ೨\tfrac{೧}{೨}.$$

$$\text{ಯ} = \tfrac{೩}{೪};\ \ \text{ವ} = ೨\tfrac{೧}{೨}.$$

ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದರ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯುವದು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬದಲಾಗಿ ಹಾಕಿ ಅದನ್ನು ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತ ಮಾತ್ರ-ವಿರುವಂಥ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುವದು, ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು, ಮತ್ತು ಆ ಬೆಲೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು, ಹೀಗೆ ಈ ರೀತಿಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಗೆ ಉತ್ಥಾಪನ ರೀತಿಯೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಥಾಪನವೆಂದರೆ ಒಂದರ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವದನ್ನಾದರೂ ಹಾಕುವದು, ಬದಲಿ ಇಡುವದು.

ಅದರ ಮುಂದಿನ ಜೋಡಿಯನ್ನು $\text{ಯ} + ೪\text{ವ} = ೧೧\tfrac{೩}{೮}$ (೧) ಮತ್ತು $೪\text{ಯ} + ೭\text{ವ} = ೨೧\tfrac{೭}{೮}$ (೨) ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ (೧)ರ ಮೇಲಿಂದ $\text{ಯ} = ೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೪\text{ವ}$ ಮತ್ತು ಯದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೨) ನೇಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗಿ

$$೪(೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೪\text{ವ}) + ೭\text{ವ} = ೨೧\tfrac{೭}{೮}$$

$$\therefore\quad ೪೫\tfrac{೧}{೨} - ೧೬\text{ವ} + ೭\text{ವ} = ೨೧\tfrac{೭}{೮}$$

$$\therefore\quad ೯\text{ವ} = ೨೩\tfrac{೫}{೮}\ \text{ಇಲ್ಲವೆ}\ \text{ವ} = ೨\tfrac{೫}{೮}.$$

$$\text{ಮತ್ತು}\quad \text{ಯ} = ೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೪\text{ವ} = ೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೪ \times ೨\tfrac{೫}{೮} = ೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೧೦\tfrac{೧}{೨} = \tfrac{೭}{೮}.$$

$$\therefore\quad \text{ಯ} = \tfrac{೭}{೮},\ \ \text{ವ} = ೨\tfrac{೫}{೮}.$$

ಅದರೊಳಗಿನ ಕೊನೆಯ ಜೋಡಿಯನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

$೩\text{ಯ} + ೪\text{ವ} = ೧೧\tfrac{೩}{೮}$....(೧) ಮತ್ತು $೧೨\text{ಯ} + ೫\text{ವ} = ೧೯\tfrac{೩}{೮}$ ....(೨)
(೧)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ $೩\text{ಯ} = ೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೪\text{ವ}$ ಇಲ್ಲವೆ $\text{ಯ} = \tfrac{೧}{೩}(೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೪\text{ವ})$.
ಯದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (೨)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗಿ

$$೪(೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೪\text{ವ}) + ೫\text{ವ} = ೧೯\tfrac{೩}{೮}$$

$$\therefore\quad ೪೫\tfrac{೧}{೨} - ೧೬\text{ವ} + ೫\text{ವ} = ೧೯\tfrac{೩}{೮}$$

$$\therefore\quad ೧೧\text{ವ} = ೨೬\tfrac{೧}{೮}\ \text{ಇಲ್ಲವೆ}\ \text{ವ} = ೨\tfrac{೩}{೮}.$$

$$\text{ಮತ್ತು}\quad \text{ಯ} = \tfrac{೧}{೩}(೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೪\text{ವ}) = \tfrac{೧}{೩}(೧೧\tfrac{೩}{೮} - ೯\tfrac{೧}{೨}) = \tfrac{೧}{೩} \times ೧\tfrac{೭}{೮} = \tfrac{೫}{೮}.$$

$$\text{ಯ} = \tfrac{೫}{೮},\quad \text{ವ} = ೨\tfrac{೩}{೮}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೭.

ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, **ಉತ್ಥಾಪನ ರೀತಿಯಿಂದ** ಬಿಡಿಸಿರಿ. ತಾಳೆಯನ್ನು ಅವಶ್ಯ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

೧. ೪ಯ+೯ವ=೩೦, ೭ಯ+ ವ=೨೩.	**೨.** ೫ಯ−೭ವ= ೩, ಯ−೪ವ= −೨.	**೩.** ೧೨ಯ+೫ರ=೨೨, ೮ಯ+೩ರ=೧೪.
೪. ೯ಪ−೪ಮ =೧೬, ೮ಪ+೫ಮ =೫೭.	**೫.** ೯ವ−೮ಸ = −೬, ೭ವ+೫ಸ = ೨೯.	**೬.** ೧೦ನ+೧೧ಮ=೧೬, ೬ನ− ೭ಮ =−೪.
೭. ೩ಲ+೫ವ=−೧, ೧೩ಲ−೪ವ= −೩೦.	**೮.** ೨ಯ−೧೯ರ=−೧೮, ೧೦ಯ−೪೧ರ=೧೮.	**೯.** ೧೧ಪ−೨ಮ=−೨೯, ೯ಪ+೭ಮ=−೪೧.
೧೦. ೨೫ಯ−೧೮ವ=−೧, ೫ಯ+ ೩ವ =೨.	**೧೧.** ೧೩ಯ+ ೬ರ =೧೪, ೫ಯ+೧೮ರ= ೮.	**೧೨.** ೧೦ರ− ೭ವ =೧೯, ೫ರ+೨೧ವ=೧೩.

೨·೧೦. ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣದಲ್ಲಿ ಯ+ ವ=೩$\frac{೫}{೬}$ (೧) ಮತ್ತು ೧೦ಯ + ೩ವ = ೧೫ (೨) ಈ ಜೋಡಿಯೊಳಗಿನ (೧)ರ ಮೇಲಿಂದ ಹೇಗೆ ವ = ೩$\frac{೫}{೬}$ − ಯ, ಹಾಗೆಯೇ (೨)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ ೩ವ = ೧೫ − ೧೦ಯ, ಅಂದರೆಯೇ ವ = ೫ − $\frac{೧೦}{೩}$ಯ. ಈಗ ವ ದ ಬೆಲೆಯು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ,

೩$\frac{೫}{೬}$ − ಯ = ೫ − $\frac{೧೦}{೩}$ಯ

∴ $\frac{೭}{೩}$ಯ = $\frac{೭}{೬}$ ಇಲ್ಲವೆ ಯ = $\frac{೧}{೨}$ ಆದುದರಿಂದ ವ = ೩$\frac{೧}{೩}$.

ಯ = $\frac{೧}{೨}$; ವ = ೩$\frac{೧}{೩}$.

ಇದರಂತೆ **ಎರಡು ಸಮಮಾನಿಕ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ** ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈ ವಿಧವಾಗಿ ದೊರೆತ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದು ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆಮೇಲೆ ಮೊದಲನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿಯ ೩ಯ + ೪ವ = ೧೧$\frac{೩}{೮}$....(೧) ಮತ್ತು ೧೨ಯ+೫ವ=೧೯$\frac{೩}{೮}$....(೨) ಈ ಮೂರನೇ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

(೧)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ ೪ವ = ೧೧$\frac{೩}{೮}$ − ೩ಯ, ಅಂದರೆಯೇ ವ=$\frac{೧}{೪}$(೧೧$\frac{೩}{೮}$ −೩ಯ), ಮತ್ತು (೨)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ ೫ವ=೧೯$\frac{೩}{೮}$ −೧೨ಯ, ಅಂದರೆಯೇ ವ = $\frac{೧}{೫}$(೧೯$\frac{೩}{೮}$ − ೧೨ಯ).

ಈಗ **ವ** ದ ಬೆಲೆಯು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{೧}{೪}$(೧೧$\frac{೩}{೮}$ − ೩ಯ) = $\frac{೧}{೫}$(೧೯$\frac{೩}{೮}$ − ೧೨ಯ).

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೫(೧೧$\frac{೩}{೮}$−೩ಯ)=೪(೧೯$\frac{೩}{೮}$−೧೨ಯ)

∴ ೫೬$\frac{೭}{೮}$ − ೧೫ಯ = ೭೭$\frac{೧}{೨}$ − ೪೮ಯ

∴ ೩೩ಯ = ೨೦$\frac{೫}{೮}$ ಇಲ್ಲವೆ ಯ = $\frac{೫}{೮}$.

ಮತ್ತು ವ = $\frac{೧}{೪}$(೧೧$\frac{೩}{೮}$ − ೩ಯ) = $\frac{೧}{೪}$(೧೧$\frac{೩}{೮}$ − ೧$\frac{೭}{೮}$) = $\frac{೧}{೪}$ × ೯$\frac{೧}{೨}$ = ೨$\frac{೩}{೮}$.

ಯ = $\frac{೫}{೮}$; ವ = ೨$\frac{೩}{೮}$.

ಈ ರೀತಿಗೆ **ತುಲನೆ ರೀತಿ** ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೮.

ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

೧. ೨ಯ−೫ರ=−೨೧, ೩ಯ+೪ರ=೨೬.
೨. ೮ವ+೫ಸ=೧೮, ೪ವ−೩ಸ=−೨.
೩. ೫ಲ+೨ವ=೧೯, ೭ಲ−೩ವ=೧೫.

೪. ೧೧ಯ−೯ರ=೨೮, ೧೦ಯ+೩ರ=೫೯.
೫. ೪ಪ−೭ಮ=೧, ೩ಪ+೧೦ಮ=೧೬.
೬. ೧೦ಯ+೭ಸ=−೨, ೬ಯ−೫ಸ=೮.

೭. ೧೨ಲ+ವ=೬, ೬ಲ−೭ವ=−೧೨.
೮. ೯ಪ−೪ಬ=೫, ೧೫ಪ+೨ಬ=೪.
೯. ೩ಯ−೨ರ=೨೮, ೧೧ಯ+೫ರ=೭೮.

೧೦. ೨೫ಯ−೧೨ವ=−೧೪, ೪ಯ−೯ವ=೧೯.
೧೧. ೧೪ಪ+೯ಮ=೧೦, ೧೬ಪ+೩ಮ=೯.
೧೨. ೨೪ಯ−೫ರ=೫, ೧೬ಯ−೧೫ರ=೧.

೪.

೨·೧೧. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಬಿಡಿಸಿದ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು **ಅಯ + ಇರ = ಕ** ಈ ಸ್ವರೂಪದವಿದ್ದವು. ಯಾವಾಗಲೂ ಇಂಥ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಮಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತವೆಂದಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ **ಪ. ೨·೨**ರಲ್ಲಿಯ ಎರಡು

ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಷಯದ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ದೊರೆತ ೧೦ಯ + ವ = ೬(ಯ + ವ) + ೬, ಮತ್ತು ೧೦ವ + ಯ = ೪(ಯ + ವ) + ೯ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಇದರೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೊದಲು ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ತರುವಾಯ ಅದನ್ನು ಅಯ + ಇರ = ಕ ಈ ಮಾದರಿಯ ಸಾದಾ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

೧೦ಯ + ವ = ೬(ಯ + ವ) + ೬

∴ ೧೦ಯ + ವ = ೬ಯ + ೬ವ + ೬

∴ ೪ಯ − ೫ವ = ೬ ....(೧)

ಮತ್ತು ೧೦ವ + ಯ = ೪(ಯ + ವ) + ೯

∴ ೧೦ವ + ಯ = ೪ಯ + ೪ವ + ೯

∴ ೬ವ − ೩ಯ = ೯

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ೨ವ − ಯ = ೩ ....(೨)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೮ವ − ೪ಯ = ೧೨...........(೨ಅ)

(೧) ಮತ್ತು (೨ಅ) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ, ೩ವ = ೧೮ ಇಲ್ಲವೆ **ವ=೬.**

ಮತ್ತು ೨ವ − ಯ = ೩............(೨) ಇರುವದರಿಂದ **ಯ = ೯.**

∴ **೯೬** ಇದು **ಇಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯು.**

[**ತಾಳೆ:** ೬(೯+೬)+೬ = ೬×೧೫+೬ = **೯೬; ** ೪(೬+೯)+೯ = ೪×೧೫+೯ = **೬೯.**]

ಉ. ೨. ಪ. ೨·೩ ರೊಳಗಿನ **ಉ. ೪** ನೆಯದರಲ್ಲಿಯ $\frac{ಯ}{೨೫}+\frac{ವ}{೨೦}=೨೧೫೦$ ಮತ್ತು $\frac{ಯ}{೨೦}+\frac{ವ}{೨೫}=೨೩೫೦$ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

$\frac{ಯ}{೨೫}+\frac{ವ}{೨೦}=೨೧೫೦$ ....(೧)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೪ಯ+೫ವ=೨೧೫೦೦೦....(೧ಅ)

$\frac{ಯ}{೨೦}+\frac{ವ}{೨೫}=೨೩೫೦$ ....(೨)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೫ಯ+೪ವ=೨೩೫೦೦೦....(೨ಅ)

(೧ಅ) ವನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೨೦ಯ + ೨೫ವ = ೧೦೭೫೦೦೦..(೧ಆ)

(೨ಅ) ವನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೨೦ಯ+೧೬ವ=೯೪೦೦೦೦....(೨ಆ)

(೧ಆ) ಮತ್ತು (೨ಆ) ಇವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ,

೯ವ=೧೩೫೦೦೦ ಇಲ್ಲವೆ ವ=**೧೫೦೦೦.**

(೧ಅ) ದಲ್ಲಿ ವ=೧೫೦೦೦ ಹಾಕಲಾಗಿ, ೪ಯ+೭೫೦೦೦=೨೧೫೦೦೦

∴ ೪ಯ=೧೪೦೦೦೦ ಇಲ್ಲವೆ, ಯ=**೩೫೦೦೦.**

∴ **ರೂ. ೩೫೦೦೦, ರೂ. ೧೫೦೦೦ ಇವೆರಡು ಬೇಕಾದ ರಕಮುಗಳು.**

[ತಾಳೆ: ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೪ ದರದಂತೆ ೩೫೦೦೦ ರೂ. ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ೧೪೦೦ ರೂ.; ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ದರದಿಂದ ೧೫೦೦೦ ರೂ. ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ೭೫೦ ರೂ. ೧೪೦೦ ರೂ.+೭೫೦ ರೂ. =೨೧೫೦ ರೂ.; ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ದರದಂತೆ ೩೫೦೦೦ ರೂ. ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ೧೭೫೦; ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೪ ದರದಂತೆ ೧೫೦೦೦ ರೂ. ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ೬೦೦ ರೂ. ೧೭೫೦ ರೂ.+೬೦೦ ರೂ. =೨೩೫೦ ರೂ.]

ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ತೆಗೆದ ನಂತರ ನಾವು ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು.

(೧ಅ) ಮತ್ತು (೨ಅ) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ, ೯ಯ+೯ವ=೪೫೦೦೦೦

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೯ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಯ+ವ=೫೦೦೦೦....(೩)

(೨ಅ) ದೊಳಗಿಂದ (೧ಅ) ವನ್ನು ಕಳೆದು, ಯ−ವ=೨೦೦೦೦....(೪)

(೩) ಮತ್ತು (೪) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ, ೨ಯ=೭೦೦೦೦ ಇಲ್ಲವೆ

ಯ=೩೫೦೦೦.

(೩) ನೆಯದೊಳಗಿಂದ (೪)ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ, ೨ವ=೩೦೦೦೦ ಇಲ್ಲವೆ

ವ=೧೫೦೦೦.

ಅಯ+ಇರ=ಕ ಮತ್ತು ಇಯ+ಅರ=ಗ ಈ ಮಾದರಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಿದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸಹಗುಣಕವು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸಹಗುಣಕವು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೊದಲನೆಯ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಈ ರೀತಿಯ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾವು (೧) ಮತ್ತು (೨) ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿ-

ದಂತೆಯೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ನಮಗೆ ಮೊದಲು ವ ದ **ಲೋಪ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ** ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಹಾಗಾದರೆ,

(೧)ನ್ನು ೨೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $\frac{೪}{೫}$ಯ+ವ =೪೩೦೦೦....(೫)

ಮತ್ತು (೨) ನೆಯದನ್ನು ೨೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $\frac{೫}{೪}$ಯ+ವ =೫೮೭೫೦....(೬)

(೬) ರ ಒಳಗಿಂದ (೫) ನ್ನು ಕಳೆದು, $\frac{೯}{೨೦}$ಯ = ೧೫೭೫೦

∴ $\frac{೧}{೨೦}$ಯ = ೧೭೫೦ ಇಲ್ಲವೆ, ಯ = **೩೫೦೦೦.**

ಮತ್ತು $\frac{೧}{೨೦}$ಯ=೧೭೫೦ ಇದ್ದುದರಿಂದ (೨)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ

೧೭೫೦ + $\frac{೧}{೨೫}$ವ = ೨೩೫೦

∴ $\frac{೧}{೨೫}$ವ = ೬೦೦ ಇಲ್ಲವೆ, ವ = **೧೫೦೦೦.**

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೮(೨ಯ−೩) + ೨(೩ರ+೧) = $\frac{೧}{೩}$(೪ಯ+ರ+೩) + $\frac{೧}{೨}$(೭ಯ+೪ರ+೬)
= ೫(೮ − ಯ − ರ) − ೩(೨ಯ+೩ರ−೪).

ಈ ಮಾದರಿಯು ಕ=ಖ=ಗ ದಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಕ=ಖ, ಖ=ಗ, ಮತ್ತು ಗ=ಕ, ಹೀಗೆ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಬೇಕು. ನಮಗೆ ಅನುಕೂಲವೆನಿಸುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಮೊದಲು ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವಾ.

೮(೨ಯ − ೩) + ೨(೩ರ + ೧) = $\frac{೧}{೩}$(೪ಯ + ರ + ೩)+$\frac{೧}{೨}$(೭ಯ + ೪ರ + ೬)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

೪೮(೨ಯ−೩) + ೧೨(೩ರ+೧) = ೨(೪ಯ + ರ + ೩)+ ೩(೭ಯ+ ೪ರ + ೬)

∴ ೯೬ಯ−೧೪೪+೩೬ರ+೧೨=೮ಯ+೨ರ+೬+೨೧ಯ+೧೨ರ+೧೮

∴ ೯೬ಯ + ೩೬ರ−೧೩೨ = ೨೯ಯ+೧೪ರ+೨೪

∴ ೬೭ಯ+೨೨ರ = ೧೫೬ ....(೧)

ಮತ್ತು ೮(೨ಯ−೩)+೨(೩ರ+೧) = ೫(೮−ಯ−ರ)−೩(೨ಯ+೩ರ−೪)

∴ ೧೬ಯ−೨೪+೬ರ+೨ = ೪೦−೫ಯ−೫ರ−೬ಯ−೯ರ+೧೨

∴ ೧೬ಯ+೬ರ−೨೨= −೧೧ಯ−೧೪ರ+೫೨

∴ ೨೭ಯ+೨೦ರ = ೭೪ ....(೨)

(೧)ನೆಯದನ್ನು ೧೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೬೭೦ಯ+೨೨೦ರ = ೧೫೬೦........(೧ಅ)
(೨)ನೆಯದನ್ನು ೧೧ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೨೯೭ಯ+೨೨೦ರ = ೮೧೪........(೨ಅ)
(೧ಅ)ದೊಳಗಿಂದ (೨ಅ)ವನ್ನು ಕಳೆದು, ೩೭೩ಯ = ೭೪೬ ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೨.
(೨)ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ, ೫೪ + ೨೦ರ = ೭೪ ಅಂದರೆ, ೨೦ರ = ೨೦;

ಅಂದರೆ, ರ = ೧. ∴ ಯ = ೨; ರ = ೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೯.

ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೧. $\frac{ಯ}{೨} + \frac{ರ}{೩} = ೪,\quad \frac{ಯ}{೪} + \frac{ರ}{೨} = -೨.$

೨. $\frac{ಯ}{೬} - \frac{ರ}{೪} = ೧,\quad \frac{ಯ}{೩} - \frac{ರ}{೨} = ೨.$

೩. $\frac{ಯ}{೮} + \frac{ಪ}{೧೦} = ೪,\quad \frac{ಯ}{೧೬} - \frac{ವ}{೫} = -೩.$

೪. $\frac{ಯ}{೪} - \frac{ಲ}{೮} = ೨\frac{೧}{೪},\quad \frac{ಯ}{೬} - \frac{ಲ}{೩} = \frac{೨}{೩}.$

೫. $\frac{೫ಯ}{೩} + \frac{೮ಲ}{೯} = ೧೭\frac{೨}{೩},\quad \frac{೩ಯ}{೪} - \frac{೪ಲ}{೩} = ೨\frac{೧}{೩}.$

೬. $ಯ = \frac{ರ-೮}{೩},\quad ರ = \frac{೪ಯ+೩}{೯}.$

೭. $\frac{೪ಪ-೩}{೫} + ಮ = ೭,\quad ೩ಪ - \frac{೨ಮ+೧೧}{೩} = ೧೬.$

೮. $\frac{೪ಯ}{೫} - \frac{೯ರ}{೧೬} = -\frac{೧}{೨},\quad \frac{೩ಯ}{೨} + \frac{೫ರ}{೮} = ೧೨\frac{೧}{೨}.$

೯. $\frac{೨ಪ}{೬} + \frac{೫ಮ}{೯} = ೨\frac{೧}{೩},\quad ೩ಪ - ೨ಮ = ೦.$

೧೦. ·೫ನ + ·೮ಮ = ೨·೧, ·೩ನ + ·೭ಮ = ೧·೭.

೧೧. ·೬ದ − ·೪ನ = ·೨, ೧·೨ದ + ೧·೧ನ = ೮.

೧೨. ·೨೫ಯ + ·೫ರ = ೪, ·೭೫ಯ − ·೪ರ = ·೬.

೧೩. ·೦೮ರ − ·೨೨ವ = −·೩, ೪ರ − ೭·೨ವ = ೪.

೧೪. ೯ಪ − ·೦೯ಮ = ೩·೨೪, ·೭ಪ + ·೧೪ಮ = ·೮೪.

೧೫. ೮·೩ಲ+೧·೯ವ=೧·೮೫, ೧೬. (೨ನ−೫ಮ)/೩ + (೩ನ+೨ಮ)/೭ = ೩,

೨·೧ಲ+೧·೧ವ=·೫೩. (ನ−೨ಮ)/೫ − (೮ಮ−೩ನ)/೨ = ೨ ೨/೫.

೧೭. (೪ಯ−ರ)/೩ − (೨ರ−೩ಯ)/೨ = ೫/೩, ೧೮. (೫ಪ+೨ಮ)/೩ + (ಮ−ಪ)/೪ = ೬,

(೮ಯ−೯ರ)/೬ + (೫ರ−೨ಯ)/೪ = ೧ ೧/೩. (೩ಮ−೨ಪ)/೬ + (೪ಪ+ಮ)/೯ = ೧ ೯/೬.

೧೯. ೪ಯ+೩(೫ರ−೨ಯ)=೭ಯ+೬(೩ರ−೫),
೫ರ−೨(೩ಯ−೪ರ)=೫(೩ರ−೨ಯ).

೨೦. ೫ದ−೨(೩ನ−೫)=೭ನ+೧+೩(೫ದ−೪ನ−೧),
೨ದ+೭ನ+೪=೫(೩ದ+ನ−೧).

೨೧. ೩ಪ+೨ಮ−೭=೫(೨ಪ−ಮ),
೪(೨ಪ−೫ಮ+೧೭)=೧೮ಮ−೧೪ಪ−೨(೩ಪ+ಮ).

೨೨. ಯ/೪ + ೩(೨ಯ−ರ+೩) = ೫ರ/೬ + ೨(೫ಯ−೨ರ+೪),

೧೫ಯ − ೪ರ + ೩ = ೪(ಯ + ೨ರ/೧೫ + ೩).

೨·೧೨. ಉ. ೧. ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೯ ಇರುತ್ತದೆ. ಅವೇ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ತಿರುವ-ಮುರುವ ಬರೆದು ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೯೮ ರಿಂದ ಸಣ್ಣದು ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಶತಂ ಹಾಗೂ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರುವದೋ ಅದರ ೨ ೧/೨ ಪಟ್ಟು ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಯ ಮತ್ತು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ರ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ೯−ಯ−ರ ಇರುವದು; ಆದುದರಿಂದ ಮೂಲ

ಸಂಖ್ಯೆಯು = ೧೦೦ ಯ + ೧೦ ರ + (೯ − ಯ − ರ), ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ತಿರುವಿ ಬರೆದು ನಿಷ್ಪನ್ನವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು = ೧೦೦ (೯ − ಯ − ರ) + ೧೦ ರ + ಯ, ಮತ್ತು ಶತಂ ಮತ್ತು ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ತಿರುವಮುರವ ಮಾಡಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು = ೧೦೦ ರ + ೧೦ ಯ + ೯ − ಯ − ರ.

∴ ೧೦೦ಯ + ೧೦ರ + (೯ − ಯ − ರ) + ೧೯೮ = ೧೦೦(೯ − ಯ − ರ) + ೧೦ರ + ಯ

∴ ೯೯ಯ − ೯೯ (೯ − ಯ − ರ) + ೧೯೮ = ೦

೯೯ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಯ − (೯ − ಯ − ರ) + ೨ = ೦

∴ ೨ಯ + ರ = ೭ .... (೧)

ಮತ್ತು ೧೦೦ಯ + ೧೦ರ + (೯ − ಯ − ರ) = ೭/೩ (೧೦೦ರ + ೧೦ಯ + ೯ − ಯ − ರ)

∴ ೯೯ಯ + ೯ರ + ೯ = ೭/೩ (೯೯ರ + ೯ಯ + ೯)

∴ ೩ (೩೩ಯ + ೩ರ + ೩) = ೭/೩ × ೯ (೧೧ರ + ಯ + ೧)

∴ ೩೩ಯ + ೩ರ + ೩ = ೭ (೧೧ರ + ಯ + ೧)

∴ ೩೩ಯ + ೩ರ + ೩ = ೭೭ರ + ೭ಯ + ೭

∴ ೨೬ಯ − ೭೪ರ = ೪

∴ ೧೩ಯ − ೩೭ರ = ೨. .... (೨)

(೧)ನ್ನು ೩೭ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೭೪ಯ + ೩೭ರ = ೨೫೯ .... (೧ಅ)

(೧ಅ) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ೮೭ಯ = ೨೬೧ ಇಲ್ಲವೆ ಯ = ೩.

ಮತ್ತು ∵ ೨ಯ + ರ = ೭ ∴ ರ = ೧.

∴ **೩೧೫ ಇದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು.**

[ತಾಳೆ: ೩೧೫ + ೧೯೮ = ೫೧೩. ೭/೩ × ೧೩೫ = ೭ × ೪೫ = ೩೧೫.]

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೦.

೧. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೫೮ ಇದ್ದು, ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೮ ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೨. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೪೬ ಇದ್ದು, ಮೊದಲನೆಯದರ ಮೂರುಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ೫ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೭೪ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೩. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೨೦ ಇದ್ದು, ಮೊದಲನೆಯದರ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟನ್ನು ಎರಡನೆಯದರ ೯ ಪಟ್ಟಿನೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೧೫ ಬರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೪. ಇಂದು ಇಬ್ಬರು ಸಹೋದರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜು ೫೧ ವರ್ಷ-ಗಳಿದ್ದು ೯ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಹಿರಿಯವನ ವಯಸ್ಸು ಕಿರಿಯವನ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೩ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

೫. ಒಂದು ಕ್ಲಬ್ಬಿನ ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ ನಡೆದ ಹೆಸರಾದ ಆಟಗಾರರ ಕ್ರಿಕೆಟಿನ ಪಂದ್ಯಾಟದಲ್ಲಿ ಸಭಾಸದರಿಗೆ ಪ್ರವೇಶ ಫೀಯು ೩ ರೂ. ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಜನರಿಗಾಗಿ ೮ರೂ. ಇತ್ತು. ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೩೮೪ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನವು ೯೬೭೨ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಲ್ಲಿ ಸಭಾಸದರು ಎಷ್ಟು ಇದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಮತ್ತು ಬೇರೆಯವರು ಎಷ್ಟು ಇದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಒಬ್ಬ ವರ್ತಕನ ಹತ್ತರ ೧೨ ಡಝನ ಚಹದ ರತ್ತಲಿನ ಡಬ್ಬಿಗಳಿ-ದ್ದವು. ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೆಲವನ್ನು ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೨॥ ರೂ., ಈ ದರದಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಮುಂದೆ ದರವು ಏರಿದ ಮೂಲಕ ಉಳಿದವು-ಗಳನ್ನು ೨ ರೂ. ೧೧ ಆ. ಈ ದರದಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಒಟ್ಟು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ೩೭೭ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಆವನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನು?

೭. ಒಂದೇ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ಸುಬ್ಬರಾಯರು ೮ ಸೇ. ಬೆಣ್ಣೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ೫ ಸೇ. ತುಪ್ಪವನ್ನು ೭೯ ರೂ. ಗೆ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದ-ರಾಯರು ೫ ಸೇ. ಬೆಣ್ಣೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ೮ ಸೇ. ತುಪ್ಪವನ್ನು ೮೩॥ ರೂ. ಗೆ ಕೊಂಡರು. ಆದರೆ ಬೆಣ್ಣೆ ಮತ್ತು ತುಪ್ಪ ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸೇರಿನ ದರವೇನಿತ್ತು?

೮. ಕಮಲೆಯು ೧೪ ಡಝನ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ೪ ಡಝನ ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ೩ ರೂ. ೯ ಆ. ಗೆ ಮತ್ತು ಸರಲೆಯು ೨೪ ಡಝನ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ೧೪ ಡಝನ ಮೋಸಂಬಿ ಹಣ್ಣು-೭ ರೂ. ೧೧ ಆ. ಗೆ ಕೊಂಡರು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ದರವೇನು?

೯. ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ಒಂದು ಸಕ್ಕರೆಯ ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ೬%ದ ಶೇವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಲವನ್ನು ೩⅓%ದ ಸರಕಾರಿ ರೋಖೆಗಳಲ್ಲಿ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೨೦೦೦೦ ರೂ. ಇಟ್ಟರೆ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪನ್ನವು ೧೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೇವಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೦. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ವಸಂತರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೂರು-ಪಟ್ಟು ಶಾರದಾಬಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ೪ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೧೬ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇತ್ತು. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ವಸಂತರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಶಾರದಾಬಾಯಿಯವರ ವಯಸ್ಸಿನ ೫ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೨೦ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಇಂದಿನ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೧೧. ಒಂದು ಡೋಣಿಯು ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದಗುಂಟ ೩ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ೧೫ ಮೈಲು ಹೋಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ತಿರುಗಿ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅಷ್ಟೇ ಅಂತರವನ್ನು ೫ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಿಂತ ನೀರಿನೊಳಗೆ ಡೋಣಿಯ ವೇಗವನ್ನು ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿ-ಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೭ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ೨೭ ರಿಂದ ಸಣ್ಣದಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೧೩. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ದಿನಾಲು ೧೦ ಆ. ಗೆ ಸೇರು, ಈ ದರದಿಂದ ಕೆಲವನ್ನು ಮತ್ತು ೧೨ ಆ. ಗೆ ಸೇರು ಈ ದರದಿಂದ ಕೆಲವನ್ನು, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೭೫ ಸೇರು ಹಾಲನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೧೩ ಆ. ಗೆ ಸೇರಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ೯ ರೂ. ೧೧ ಆ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದ ಎಷ್ಟು ಹಾಲನ್ನು ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ?

೧೪. ೬ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೪ ರತ್ತಲು ಕಾಫಿಯನ್ನು ತಕ್ಕೊಂಡರೆ ೨೮॥ ರೂ. ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ೪ ರತ್ತಲು ಚಹ ಮತ್ತು ೬ ರತ್ತಲು ಕಾಫಿಯನ್ನು ತಕ್ಕೊಂಡರೆ ೨೯ ರೂ. ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೆಷ್ಟು?

೧೫. ಇಂದಿಗೆ ಅರವಿಂದನ ವಯಸ್ಸಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೩ ವರ್ಷ ಹೆಚ್ಚು ಅವನ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಇರುತ್ತದೆ. ೫ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಅವನ ವಯಸ್ಸಿನ ೩ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೧ ವರ್ಷ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

೧೬. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ೨||| ರೂ. ಗೆ ರತ್ತಲು ಈ ದರದ ಕೆಲವನ್ನು ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ೧೪ ಆ. ಗೆ ರತ್ತಲು ಈ ದರದ ಕೆಲವನ್ನು, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೦೦ ರತ್ತಲು ಚಹವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿ, ಆ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೩ ರೂ. ಗೆ ರತ್ತಲಿನಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ೧೮¾ ರೂ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣದ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಎಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಅವನು ಕೊಂಡಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೭. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಾಲು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ನೀರು, ಹೀಗೆ ೧೫ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಾಲು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ನೀರು ಹೀಗೆ ೨೫ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣವಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಪಾತ್ರೆಗಳೊಳಗಿನ ಮಿಶ್ರಣಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಶುದ್ಧ ಹಾಲು ಮತ್ತು ನೀರು ಇವು ೫:೩ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುವವು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೫ ಶೇರು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆ ಮಿಶ್ರಣಗಳನ್ನು ಒಂದೆಡೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಶುದ್ಧ ಹಾಲು ಮತ್ತು ನೀರು ಇವು ೧೯:೧೧ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುವವು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಶುದ್ಧ ಹಾಲು ಎಷ್ಟು ಮತ್ತು ನೀರು ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೮. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೨೭ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವದು. ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೭ ಇದ್ದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೧೯. ೪ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಇದ್ದ ರಾಮನ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ೬ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಗೋವಿಂದನ ವಯಸ್ಸು ಆಗುವದು, ಮತ್ತು ೩ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಇದ್ದ ಗೋವಿಂದನ ವಯಸ್ಸಿನ ೩ ಪಟ್ಟು ೧೪ ವರ್ಷಗಳ

ತರುವಾಯ ರಾಮನದು ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

೨೦. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ೧೮ ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡುತ್ತವೆ. ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಒಂದೂವರೆ ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದರೆ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕುಪಟ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೨೧. ಒಬ್ಬ ಒಕ್ಕಲಿಗನ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೨ ರೂ. ದಿನಗೂಲಿಯಂತೆ ಕೆಲವು ಗಂಡಸರು, ಮತ್ತು ೧॥ ರೂ. ದಿನಗೂಲಿಯಂತೆ ಕೆಲವು ಹೆಂಗಸರು, ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಒಟ್ಟು ದಿನಗೂಲಿಯು ೭೨ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಹೆಂಗಸರಷ್ಟು ಗಂಡಸರು, ಮತ್ತು ಗಂಡಸರಷ್ಟು ಹೆಂಗಸರು ಇದ್ದರೆ, ಒಟ್ಟು ದಿನಗೂಲಿಯು ೬೮ ರೂ. ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ, ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಹೆಂಗಸರು ಇದ್ದರು?

೨೨. ಒಂದು ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಗಂಡಸರು, ಹೆಂಗಸರು ಮತ್ತು ಹುಡುಗರು, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೦೦ ಜನರು ಕೆಲಸದ ಮೇಲಿದ್ದು, ಅವರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೪೦ ರೂ. ೩೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೨೦ ರೂ. ಪಗಾರವನ್ನು ಮತ್ತು ೩೦ ರೂ. ೨೫ ರೂ. ೧೫ ರೂ. ದಂತೆ ತುಟ್ಟಿಭತ್ತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಪಗಾರದ ಒಟ್ಟು ರಕಮು ೩೫೬೦ ರೂ. ಮತ್ತು ತುಟ್ಟಿಭತ್ತಿಯು ೨೭೪೦ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಗಂಡಸರ, ಹೆಂಗಸರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೩. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ೬ ಪಟ್ಟು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೪ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೮ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದು, ಮೊದಲನೆಯದರ ೧/೭ ಎರಡನೆಯದರ ೧/೩ ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವವು?

೨೪. ಒಂದು ರಕಮು ೪ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಬೇರೊಂದು ೫॥ ದರದಿಂದ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ರಕಮುಗಳನ್ನು ೧ ವರ್ಷದ ವರೆಗೆ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟಿದೆ. ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಆ ಎರಡೂ ರಕಮುಗಳು ತಿರುಗಿ ಬಂದ ಮೇಲೆ ಆ ಎಲ್ಲ ಹಣವನ್ನು

ಬಡ್ಡಿಸಹಿತವಾಗಿ ಮತ್ತೆ ೫ ದರದಂತೆ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಒಟ್ಟು ಬಡ್ಡಿಯು ೧೯೬೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಬಡ್ಡಿ ೨೦೯೮ ರೂ. ಇದ್ದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಯಾವ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೫. ೩॥ ದರದಂತೆ ಕೆಲವನ್ನೂ, ೩ ದರದಂತೆ ಕೆಲವನ್ನೂ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧ ಲಕ್ಷ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟರೆ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ತಕ್ಕೊಳ್ಳದೆ ಅದನ್ನು ಮೂಲ ಅಸಲಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ೧೦೬೫೦೩ ರೂ. ತಿರುಗಿ ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವ ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೬. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೧॥ ರೂ. ಬೆಲೆಯ ಕೆಲವನ್ನೂ, ೨ ರೂ. ಬೆಲೆಯ ಕೆಲವನ್ನೂ, ಹೀಗೆ ದೀಪಾವಳಿಯ ವಿಶೇಷ ಸಂಚಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ೧೫೬ ರೂ. ದೊರೆತವು. ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧ ಆ. ಮತ್ತು ೨ ಆ. ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭವನ್ನು ತಕ್ಕೊಂಡಿದ್ದರೆ, ಒಟ್ಟು ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ೧೬೫ ರೂ. ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಎಷ್ಟು ಸಂಚಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨೭. ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಾಕೃತಿಯ ನೆಲದ ತುಂಡಿನ ಬದಿಗಳು ೨೨ಯ + ೪ರ ಫೂ., ೬ಯ − ೧೩ರ ಫೂ., ಮತ್ತು ೬ರ + ೨೫ ಫೂ. ಹೀಗೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ೬ ಆ.ಗೆ ಫೂಟಿನಂತೆ ಅದಕ್ಕೆ ಬೇಲಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಬರುವದು?

೨೮. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿ ನೆಲದ ತುಂಡಿನ ಬದಿಗಳ ಅಳತೆಗಳು ವಾರುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೬ಯ + ೧೨ವ − ೩, ೧೦ಯ + ೧೦ವ + ೧, ೯ಯ + ೧೩ವ + ೧ ಮತ್ತು ೨೮ಯ − ೪ವ + ೫ ಹೀಗೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ೬ ರೂ. ಗೆ ಚೌ. ವಾರು, ಈ ದರದಂತೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಆಗುವದು?

೨೯. ರಾಮರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೨ ಪಟ್ಟು ಕೃಷ್ಣರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೩ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೫ ವರ್ಷಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು; ಕೃಷ್ಣರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ

೭ ಪಟ್ಟು ರಾಮರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೪ ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೧೫ ವರ್ಷಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೩೦. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟನ್ನು ಎರಡನೆಯದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೫ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು ೨ ಬರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ೭ ಪಟ್ಟನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೫ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು ೮ ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೩೧. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಭುಜಗಳ ಎದುರಿನ ಕೋನಗಳು $(೩ಯ+೮ರ)^\circ$ ಮತ್ತು $(೧೧ರ-೪ಯ)^\circ$ ಇದ್ದು, ಮೂರನೆಯ ಕೋನವು $(೧೭ರ-೨೩ಯ)^\circ$ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂರೂ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರಿ.

೩೨. ದಹಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೩೯ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು ೧ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಎಕ್ಕಂ ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬೧ ಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವು ೧೨ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೩೩. ೩೨ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಕುಮುದೆಯ ವಯಸ್ಸು, ಇಂದು ಅವಳ ವಯಸ್ಸು ಮತ್ತು ಅವಳ ತಂದೆಯವರ ವಯಸ್ಸು ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರವಷ್ಟು ಆಗುವದು. ೪ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅವಳ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಅವಳ ವಯಸ್ಸಿನ ೫ ಪಟ್ಟು ಇತ್ತು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

೩೪. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{೧}{೧೨}$ ಭಾಗ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{೧}{೭}$ನೇ ಭಾಗ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ೨॥ ಪಟ್ಟನಷ್ಟು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವಿರುತ್ತದೆ. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{೧}{೩}$ನೇ ಭಾಗವನ್ನು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{೧}{೧೪}$ನೇ ಭಾಗದೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೧ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

ಕೆಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂಚನೆಗಳು

೨·೧೩. (೧) ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಯಾವ **ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು** ಮಾಡುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ನಿಶ್ಚಯಿಸಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅನುಕೂಲ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಆ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಲೋಪವನ್ನು ಮಾಡಿ **ಎರಡನೆಯ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಮಾನವನ್ನು** ತೆಗೆಯಬೇಕು.

(೨) **ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಮಾನವು** ತಿಳಿದ ನಂತರ ಅದನ್ನು **ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವ** ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಎರಡನೇ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. **ಉತ್ಥಾಪನ** ಇಲ್ಲವೆ **ತುಲನೆ ಈ ರೀತಿಯ** ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತದ ಮಾನವನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಅವ್ಯಕ್ತದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವ ಯಾವದಾದರೂ **ಅನುಸಾಧಿತ ಸಮೀಕರಣದ** ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

(೩) ತಾಳೆಯನ್ನು ನೋಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದರಡೇ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ ಯಾವದು ಅಥವಾ ಯಾವದರಿಂದ ದೊರೆತ ಸಮೀಕರಣವು **ಉತ್ಥಾಪನಕ್ಕಾಗಿ** ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆಯೋ ಅದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು, ಆದರೆ **ಮೂಲ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಒಳ್ಳೆಯದು.**

(೪) ಮುಖ್ಯ ಮುಖ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಬೇಕು, ಮತ್ತು ರೀತಿಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆ ಅಂಕೆಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

೨·೧೪. ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮಮಾನಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದರಲ್ಲಿ **ಯೋಗವಿಯೋಗ, ಉತ್ಥಾಪನ** ಮತ್ತು **ತುಲನೆ,** ಹೀಗೆ ಮೂರು ರೀತಿಗಳ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ತರದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಇನ್ನೂ ಒಂದೆರಡು ರೀತಿಗಳಿವೆ. ಅವು ಮುಂದೆ ಯೋಗ್ಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲ್ಪಡುವವು.

ಸ್ಥಳ ಸಂಕೋಚದ ಮೂಲಕ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ತಾಳೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ತಾಳೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡುವದು ಇಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವದು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಬದಲಿಸುವದು

೩·೧. ಬೈಜಿಕ **ಸೂತ್ರಗಳ** ಪರಿಚಯವು ನಮಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕು, ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಅನ್ಯೋನ್ಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಬೇಕು, ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಇಂದು ನಾವು ಆ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಮತ್ತೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಉ) ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು (ಅ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕ್ಷ=ಉಅ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಉದ್ದಳತೆಯು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ನಾವು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆವು. ಉದ್ದಳತೆಯು ೨೫ ಫೂ. ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ೨೦ ಫೂ. ಇದ್ದರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೫೦೦ ಚೌ. ಫೂ., ಅಥವಾ ಉದ್ದಳತೆಯು ೩೦ ವಾರು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ೨೨ ವಾರು ಇದ್ದರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೬೬೦ ಚೌ. ವಾ. ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಕ್ಷ=ಉಅ ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ, ಉ ಮತ್ತು ಅ ಈ ಪರಸ್ಪರಾವಲಂಬಿ ಮೂರು ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ– ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಕ್ಷದ –ಉಳಿದ ಸಂಗತಿಗಳೊಡನೆ ಇದ್ದ ಸಂಬಂಧವು ಯಾವ ತರದ್ದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿದೆ. ಪರಸ್ಪರಾವಲಂಬಿ ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಘಟಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಳಿದ ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ **ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃ** ಎಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಕ್ಷ=ಉಅ ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ ಇದು **ಕರ್ತೃವು** ಇರುತ್ತದೆ.

೩·೨. ಈಗ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಕ್ಷ=ಉಅ ಈ ಸೂತ್ರವು ಯೋಗ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಅಗಲಳತೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಉದ್ದಳತೆ, ಅಥವಾ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಅಗಲಳತೆ

ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ನಮಗೆ **ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವು** ಕ್ಷ ಬೇಡಾಗಿದ್ದು ಉ ಅಥವಾ ಅ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಏನು ಮಾಡಬೇಕು? **ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅಥವಾ ರಾಶಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಮತ್ತು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರಗಳು ಸರಿಯಿರುತ್ತವೆ.** ಈ ಗಣಿತ-ಶಾಸ್ತ್ರದೊಳಗಿನ ಬಹಳ ಮಹತ್ವದ ತತ್ವದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$ಕ್ಷ = ಉಅ \quad .... \quad .... \quad (೧)$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಅ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{ಕ್ಷ}{ಅ} = ಉ, \text{ ಅಂದರೆಯೇ } ಉ = \frac{ಕ್ಷ}{ಅ} \quad .... \quad (೨)$$

ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಉ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{ಕ್ಷ}{ಉ} = ಅ \text{ ಅಂದರೆಯೇ } ಅ = \frac{ಕ್ಷ}{ಉ} \quad .... \quad (೩)$$

(೨) ರಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವು ಉ ಇರುತ್ತದೆ. (೩) ರಲ್ಲಿ ಅ ಇರುತ್ತದೆ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೬೬೦ ಚೌ. ವಾರು ಇದ್ದು, ಅಗಲಳತೆಯು ೨೨ ವಾರುಗಳಿದ್ದರೆ, $ಉ = \frac{೬೬೦}{೨೨} = ೩೦$ (ಉದ್ದಳತೆಯು ೩೦ ವಾರು) ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೫೦೦ ಚೌ. ಫೂಟುಗಳಿದ್ದು ಉದ್ದಳತೆಯು ೨೫ ಫೂಟುಗಳಿದ್ದರೆ $ಅ = \frac{೫೦೦}{೨೫} = ೨೦$ (ಅಗಲಳತೆಯು ೨೦ ಫೂ.).

೩·೩. ಅಸಲು (ಅ), ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು (ದ), ಕಾಲ (ಕ) ಮತ್ತು ಬಡ್ಡಿಯು (ಬ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ $ಬ = \frac{ಅದಕ}{೧೦೦}$ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಸಲು ೫೦೦ ರೂ., ಬಡ್ಡಿಯ ದರ ೬ ಮತ್ತು ಅವಧಿಯು ೩ ವರ್ಷಗಳು ಇದ್ದರೆ ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ಬಡ್ಡಿಯು $= \frac{೫೦೦ \times ೬ \times ೩}{೧೦೦}$ ರೂ. $=$ ೯೦ ರೂ. ಹೀಗೆ ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬ ಇದು ಕರ್ತೃ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಬ ಈ ಕರ್ತೃವು ಬೇಡಾಗಿದ್ದು ಅ, ದ, ಕ

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಕರ್ತೃವು ಬೇಕಾಗಿದೆ, ಅಂದರೆ ನಮಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮೂರು ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದರೂ ಎರಡು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದು ಮೂರನೆಯದು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$ಬ = \frac{ಅದಕ}{೧೦೦} \quad .... \quad .... \quad .... \quad (೧),$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೧೦೦ಬ = ಅದಕ$, ಅಂದರೆಯೇ $ಅದಕ = ೧೦೦ಬ$.

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ದಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $ಅ = \frac{೧೦೦ಬ}{ದಕ}$ .... (೨),

ಅಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $ದ = \frac{೧೦೦ಬ}{ಅಕ}$ .... (೩),

ಮತ್ತು ಅದ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $ಕ = \frac{೧೦೦ಬ}{ಅದ}$ .... (೪).

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅಸಲನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ (೨) ರ, ದರವು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ (೩) ರ ಮತ್ತು ಅವಧಿಯು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ (೪) ರ ಉಪಯೋಗವು ಆಗುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನೂರಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೪ ದರದಿಂದ ೮೦೦ ರೂ. ರಕಮಿನ ಮೇಲೆ ೯೬ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ, $ಕ = \frac{೧೦೦ \times ೯೬}{೮೦೦ \times ೪} = ೩$ (ಮುದ್ದತು ೩ ವರ್ಷಗಳು).

ಈಗ ರಾಸಿನ ಸೂತ್ರವು $ರ = ಅ + \frac{ಅದಕ}{೧೦೦}$, ಇದರಲ್ಲಿ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. $ಅ + \frac{ಅಕದ}{೧೦೦} = ರ$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೧೦೦ಅ + ಅದಕ = ೧೦೦ರ$

$$\therefore \quad ಅ(೧೦೦ + ದಕ) = ೧೦೦ರ.$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು (೧೦೦+ದಕ) ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $ಅ = \frac{೧೦೦ರ}{೧೦೦+ದಕ}$ ....(೨)

ಆದರಂತೆಯೇ $\because$ $ಅ + \frac{\cdots}{೧೦೦} = ರ$

$\therefore \frac{ಅದಕ}{೧೦೦} = ರ - ಅ$ (ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ)

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $ಅದಕ = ೧೦೦\ (ರ - ಅ)$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಅಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ $ದ = \frac{೧೦೦(ರ - ಅ)}{ಅಕ}$ .... (೩),

ಮತ್ತು ಅದ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ, $ಕ = \frac{೧೦೦(ರ - ಅ)}{ಅದ}$ .... (೪).

೬೦೦ ರೂ. ಅಸಲಿನ ೪ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ರಾಸು ೭೨೦ ರೂ. ಆಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ಎಷ್ಟು? ಹೀಗೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದ್ದರೆ $ದ = \frac{೧೦೦\ (೭೨೦ - ೬೦೦)}{೬೦೦ \times ೪}$

೧೦೦×೧೨೦

೬೦೦×೪

೩·೪. ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಳದ ವಿಶಿಷ್ಟ ವೇಳೆಯ ಫರನ್‌ಹೀಟು ತಪಮಾಪಕದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ತಪಮಾನಾಂಕ ಮತ್ತು ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ ತಪಮಾಪಕದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ತಪಮಾನಾಂಕ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $ಫ = ೩೨ + \frac{೯}{೫}\ ಸೆಂ.$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಫ ಇದು ಕರ್ತೃ ಇದೆ. ಅದನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಸೆಂ. ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನು ಮಾಡ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ,

$೩೨ + \frac{೯}{೫}\ ಸೆಂ. = ಫ$ ಇದ್ದುದರಿಂದ

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ $\frac{೯}{೫}\ ಸೆಂ. = ಫ - ೩೨$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು $\frac{೯}{೫}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $ಸೆಂ. = \frac{೫}{೯}(ಫ - ೩೨)$.

ಯಾವದೋ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ತಪಮಾನವು ೯೫°ಫ ಇದ್ದಾಗ ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ ತಪಮಾಪಕವು $\frac{೫}{೯}(೯೫ - ೩೨^{\circ})$, ಅಂದರೆ $\frac{೫}{೯}(೬೩^{\circ})$, ಅಂದರೆ ೩೫° ತಪಮಾನವನ್ನು ತೋರಿಸುವದು.

೩·೫. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ) ಪರಿಘವು (ಪ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $ಪ = ೨\pi ತ$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಪ ಇದು ಕರ್ತೃವಿದೆ.

ಅದನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ತ ಈ ಕರ್ತೃವು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, $\text{೨}\pi\,\text{ತ}=\text{ಪ}$, ಇದ್ದುದರಿಂದ

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨π ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\text{ತ}=\frac{\text{ಪ}}{\text{೨}\pi}$.

[π ಇದು **ಗ್ರೀಕ ವರ್ಣಮಾಲೆಯೊಳಗಿನ ಒಂದು ಅಕ್ಷರವು. ಪರಿಮಿತಿ ಈ ಶಬ್ದದ ಸಲುವಾಗಿ ಇರುವ ಗ್ರೀಕ ಪ್ರತಿಶಬ್ದದ ಅದು ಮೊದಲಿನ ಅಕ್ಷರವಿರುತ್ತದೆ.** ಯಾವದೇ ವರ್ತುಳದ **ಪರಿಘವು** ಮತ್ತು ಅದರ **ವ್ಯಾಸವು** ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ೩·೧೪೧೫೯೨೬....ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ತೋರಿಸುವದರ ಸಲುವಾಗಿ ಅದರ ಬದಲಾಗಿ π ಈ ಅಕ್ಷರವು ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{\text{೨೨}}{\text{೭}}$, ೩·೧೪, ೩·೧೪೧೬ ಅಥವಾ ೩·೧೪೧೫೯ ಎಂದು ಗಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅದು ಎಷ್ಟು ಗಣಿಸಲ್ಪಡತಕ್ಕದ್ದೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಉತ್ತರವು ಎಷ್ಟು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಬೇಕೋ ಅದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. π ದ ಉಚ್ಚಾರವು **ಪಾಯ್.**]

ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಕಾರ ಕೆರೆಯ ಪರಿಘವು ೧೩೨ ಫೂ. ಇದ್ದರೆ,

$$\text{ತ}=\frac{\text{೧೩೨}}{\text{೨}\times\frac{\text{೨೨}}{\text{೭}}}=\frac{\text{೧೩೨}\times\text{೭}}{\text{೨}\times\text{೨೨}}=\text{೨೧}$$ (ತ್ರಿಜ್ಯ, ೨೧ ಫೂ. ∴ ವ್ಯಾಸವು ೪೨ ಫೂ.)

ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ) ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $\text{ಕ್ಷ}=\pi\,\text{ತ}^{\text{೨}}$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ತ ಈ ಕರ್ತೃ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, $\pi\,\text{ತ}^{\text{೨}}=\text{ಕ್ಷ}$ ಇದ್ದುದರಿಂದ

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು π ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\text{ತ}^{\text{೨}}=\frac{\text{ಕ್ಷ}}{\pi}$.

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದು $\text{ತ}=\sqrt{\frac{\text{ಕ್ಷ}}{\pi}}$.

ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಕಾರ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೩೮೬ ಚೌ. ಫೂ. ಇದ್ದರೆ,

$$\text{ತ}=\sqrt{\frac{\text{೧೩೮೬}}{\frac{\text{೨೨}}{\text{೭}}}}=\sqrt{\frac{\text{೧೩೮೬}\times\text{೭}}{\text{೨೨}}}=\sqrt{\text{೨೧}\times\text{೨೧}}=\text{೨೧}.$$ (ತ್ರಿಜ್ಯವು = ೨೧ ಫೂ.)

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೧.

(ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ π ದ ಸಂಬಂಧವು ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಅಲ್ಲಿ ಅದರ ಬೆಲೆ ೨೨/೭ ಎಂದು ತಿಳಿಯತಕ್ಕದ್ದು.)

೧. (೧) ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳ (ಪ, ಬ) ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬಾಂತರವು (ಲ) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮೊದಲು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ಬರೆದು ಸಮಾಂತರ ಬದಿಗಳು ೮ ಇಂ. ಮತ್ತು ೧೦ ಇಂ. ಇರುವಂಥ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬಾಂತರವು ೭½ ಇಂ. ಇರುವಂಥ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (೨) ಲ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರದ ಹೊಸ ರೂಪವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ೩೬ ಚೌ. ಇಂ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿರುವ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳು ೫ ಇಂ. ಮತ್ತು ೭ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಎಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨. (೧) ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಅದರ ಎತ್ತರ (ಎ) ಮತ್ತು ತಳ (ತ) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ತಳವು ೧೫ ಇಂ. ಇದ್ದು ಎತ್ತರವು ೮ ಇಂ. ಇರುವಂಥ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (೨) ತ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಹೊಸ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ೫ ಇಂ. ಇದ್ದು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೪೦ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ತಳದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. (೧) ಒಂದು ಘನದ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಮತ್ತು ಆದರ ಭುಜಗಳ (ಬ) ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (೨) ಬದಿಯು ೧೮ ಇಂ. ಇರುವ ಘನದ ಎಲ್ಲ ಪೃಷ್ಠಭಾಗಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು? (೩) ಬ ವನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವಿರಿ? (೪) ಪೃಷ್ಠಭಾಗಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೩½ ಚೌ.ಫೂ. ಇದ್ದರೆ ಬದಿಯು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು?

೪. (೧) ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ), ಅದರ ಎತ್ತರವು (ಎ) ಮತ್ತು ಅದರ ಘನಫಲವು (ಘ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (೨) ತ್ರಿಜ್ಯವು ೪ ಇಂ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ೮ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಘನ-ಫಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (೩) ಎ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು? (೪) ಘನಫಲವು ೨೩೧ ಘ. ಇಂ. ಮತ್ತು ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ೩½ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಎತ್ತರವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (ಚಹದ ದುಂಡಗಿರುವ ಡಬ್ಬಿಯು ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಆಕಾರದ್ದಿರುತ್ತದೆ.)

೫. (೧) ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ), ಅದರ ಎತ್ತರವು (ಎ) ಮತ್ತು ಅದರ ವಕ್ರಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (೨) ಅದರ ಪೃಷ್ಠಫಲ (ಪ) (ವಕ್ರಭಾಗ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಬಾಯಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ) ಮತ್ತು ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (೩) **ಉ. ೪.** (೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ವಕ್ರಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (೪) ಅದರ ಪೃಷ್ಠಫಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (೫) ಎ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಎರಡೂ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (೬) **ಉ. ೪.** (೪) ನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ವಕ್ರಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟೂ ಪೃಷ್ಠಫಲವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಚಕ್ರವು ೨೮ ಇಂ. ವ್ಯಾಸಿನದು ಇದ್ದರೆ ೪ ಮೈಲುಗಳ ಪ್ರವಾಸದಲ್ಲಿ ಅದರ ಎಷ್ಟು ಸುತ್ತುಗಳು ಆಗುವವು? ವ್ಯಾಸವು (ವ್ಯಾ) (ಇಂಚುಗಳಲ್ಲಿ), ಅಂತರವು (ಅ) (ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ), ಮತ್ತು ಸುತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು (ಸ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೭. (೧) ತ್ರಿಕೋಣದ ತಳವು (ತ), ಅದರ ಎತ್ತರವು (ಎ) ಮತ್ತು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರ-ವನ್ನು ತ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಯೋಜಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎ ಕರ್ತೃ-ವನ್ನಾಗಿ ಯೋಜಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. (೨) ಎತ್ತರವು ೮ ಇಂ. ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೨೪ ಚೌ. ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ತಳವು ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು? (೩) ತಳವು ೧೦ ಇಂ. ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೩೫ ಚೌ. ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಎತ್ತರವು ಎಷ್ಟಿರುವದು?

೮. ಸಮಕೋನಚಿತಿಯ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಉ), ಅಗಲಳತೆಯು (ಅ), ಎತ್ತರವು (ಎ), ಮತ್ತು ಘನಫಲವು (ಘ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿ-ಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು (೧) ಉ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, (೨) ಅ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, (೩) ಎ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಘನಫಲವು ೩೭ ಘ. ಫೂ., ಎತ್ತರವು ೧೫ ಇಂ., ಮತ್ತು ಉದ್ದಳತೆಯು ೨೦ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಅಗಲವೆಷ್ಟು ?

೯. ಅಚಲಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುವ ಪದಾರ್ಥವು, ಬಿಡು-ಗಡೆಯಾದ ನಂತರ ಎಷ್ಟು ಸೆಕಂಡು ಕಾಲವು (ಕ) ಆಗಿರಬಹುದೋ ಅದರ ವರ್ಗದ ಹದಿನಾರು ಪಟ್ಟು ಫೂಟು ಅಂತರವನ್ನು (ಅ) ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತ-ದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಿರಿ. ಗುಡ್ಡದ ತುದಿ-ಯಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಬಿಟ್ಟ ಕಲ್ಲು ೩ ಸೆಕಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಗುಡ್ಡದ ತಳದಲ್ಲಿ ಬಿದ್ದರೆ, ಗುಡ್ಡದ ಎತ್ತರವು ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು ?

೧೦. ಒಂದು ಕಚೇರಿಯೊಳಗಿನ ಕಾರಕೂನನಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೬೫ ರೂ. ಪಗಾರು ಸಿಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೫ ರೂ. ಬಢತಿಯಾಗುತ್ತದೆ. (೧) ಆದರೆ ಯಾವ ವರ್ಷ (ವ) ತಿಂಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಪಗಾರವು (ಪ) ಸಿಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು, (ಪ) ಈ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ರಚಿಸಿರಿ. (೨) ಹದಿನಾರನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ-ತಿಂಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಪಗಾರು ಸಿಗುತ್ತಿರಬಹುದು ? (೩) ವ ವನ್ನು ಕರ್ತೃ-ವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. (೪) ತಿಂಗಳ ಪಗಾರವು ೧೨೦ ರೂ. ಯಾವ ವರ್ಷ ಸಿಗುತ್ತದೆ?

೧೧. (೧) ನೆಲದ ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಕಾರ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸುತ್ತಲು ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಗಲಳತೆಯ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ ಮಾರ್ಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ), ಕ್ಷೇತ್ರದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ), ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದ ಅಗಲವು (ಅ), ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (೨) ಕ್ಷೇತ್ರದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ೧೦೫ ಫೂ. ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದ ಅಗಲವು ೭ ಫೂ. ಇದ್ದರೆ, ಮಾರ್ಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? (೩) ಕರ್ತೃವು ತ ಇದ್ದರೆ, ಸೂತ್ರದ ರಚನೆಯು ಹೇಗಿರುವದು ? (೪) ಮಾರ್ಗದ ಅಗಲವು ೧೪ ಫೂ.

ಇದ್ದು, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೫೪೬ ಚೌ. ಫೂ. ಇದ್ದರೆ, ಕ್ಷೇತ್ರದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಎಷ್ಟಿರುವದು ?

೧೨. ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಹೋಗುವ ಸ ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು (ಬ), ಪ ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇದ್ದರೆ, $ಬ = \frac{ಸ}{೨}(೨ಪ+ಸ-೧)$ ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ೧೪ ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಮುಂದೆ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಹೋಗುವ ೧೨ ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಹೇಳಿರಿ. ತಾಳೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಪ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು?

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಕೆಲವು ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳು (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದ್ದು)

೧

$(ಪ+ಮ)^{೩}$

೪·೧. ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ **ವರ್ಗದ** ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೇ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದೆವು. ಈಗ ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ **ಘನದ** ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$(ಪ+ಮ)$ ದ **ವರ್ಗವು** $ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}$ ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ, ಮತ್ತು $ಪ+ಮ$ ದ **ಘನವು** ಅಂದರೆ $ಪ+ಮ$ ದ **ವರ್ಗ** ಗುಣಿಲೆ $ಪ+ಮ$, ಅಂದರೆಯೇ,

$$\begin{aligned}
(ಪ+ಮ)^{೩} &\equiv (ಪ+ಮ)(ಪ+ಮ)^{೨} \\
&\equiv (ಪ+ಮ)(ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}) \\
&\equiv ಪ(ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨})+ಮ(ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}) \\
&\equiv ಪ^{೩}+೨ಪ^{೨}ಮ+ಪಮ^{೨}+ಪ^{೨}ಮ+೨ಪಮ^{೨}+ಮ^{೩} \\
&\equiv ಪ^{೩}+೩ಪ^{೨}ಮ+೩ಪಮ^{೨}+ಮ^{೩}
\end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ **ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಘನವು ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ಘನ, ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಮೊದಲನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದದ ಘನ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ.**

ಮೇಲಿನ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಂಡಿಸಿ $ಪ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪಮ(ಪ+ಮ)$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು. ತರುವಾಯ ಅದು **ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅಧಿಕ ಆ ಎರಡು**

ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

$$(\text{ಪ}+\text{ಮ})^{೩} \equiv \text{ಪ}^{೩}+೩\text{ಪ}^{೨}\text{ಮ}+೩\text{ಪಮ}^{೨}+\text{ಮ}^{೩}$$
$$\equiv \text{ಪ}^{೩}+\text{ಮ}^{೩}+೩\text{ಪ}^{೨}\text{ಮ}+೩\text{ಪಮ}^{೨}$$
$$\equiv \text{ಪ}^{೩}+\text{ಮ}^{೩}+೩\text{ಪಮ}\,(\text{ಪ}+\text{ಮ}).$$

ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ನಿಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡುಬಂದಿರಬಹುದು. ಆ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ **ಸಮತೆಯನ್ನು** ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ≡ ಈ ಒಂದು ಹೊಸ ಚಿನ್ಹವು ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ **ಸಮತೆಯನ್ನು** ತೋರಿಸುವ ಚಿನ್ಹವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು = ಈ ಚಿನ್ಹವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆವು. ಆದರೆ ಈಗ ಅದೇ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ≡ ಈ ಹೊಸ ಚಿನ್ಹವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಪ್ರಯೋಜನವೇನು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ನಮ್ಮೆದುರು ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಸಹೇತುಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದರಿಂದ ಏನಾದರೂ ಅದರ ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಯೋಜನವಿರಬಹುದೆಂಬುದು ನಿಜ.

‹ಮೂರು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡನೆಯದರ ವರ್ಗವು ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯದರ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮೂರನೇಯದರ ವರ್ಗದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು› ಎಂದು ನಮಗೆ ಯಾರಾದರೂ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಕೇಳಿದರೆ ನಾವು ಯ ಎಂಬುದು ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಯ − ೧, ಯ, ಮತ್ತು ಯ + ೧ ಇವು ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವವು, ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವು $\text{ಯ}^{೨}+೩(\text{ಯ}-೧)=(\text{ಯ}+೧)^{೨}$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಈ ಸಮೀಕರಣದೊಳಗಿನ ಎಡಬದಿಯ $\text{ಯ}^{೨}+೩(\text{ಯ}-೧)$ ಈ ರಾಶಿಯು ಬಲಬದಿಯ $(\text{ಯ}+೧)^{೨}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಈ **ಸಮತೆಯು ನಿತ್ಯಸ್ವರೂಪದ್ದಿರುತ್ತದೆಯೇ?** ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ನಮಗೆ ಹೀಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು. ಈ **ಸಮತೆಯು** ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಣಿಸಿದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯ ಮೇಲೆ, ಅಂದರೆ ಯ ದ **ಮಾನವು** (ಬೆಲೆಯು) ೪ ಇರುವದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆಯೇ ಅದು ನಿಮಿತ್ತದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದು ಅಂದರೆ **ನೈಮಿತ್ತಿಕ ಇಲ್ಲವೆ ಪ್ರಾಸಂಗಿಕವಿರುತ್ತದೆ.** ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಇರುವಂಥದ್ದು ಅಲ್ಲ, ಅದು ನಿರಂತರವಲ್ಲ. ವಿರುದ್ಧ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ,

$(\text{ಪ}+\text{ಮ})^{\text{೩}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೩}} + \text{೩ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ} + \text{೩ಪಮ}^{\text{೨}} + \text{ಮ}^{\text{೩}}$ ಈ ಸಮೀಕರಣದೊಳಗಿನ $(\text{ಪ}+\text{ಮ})^{\text{೩}}$ ಮತ್ತು $\text{ಪ}^{\text{೩}} + \text{೩ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ} + \text{೩ಪಮ}^{\text{೨}} + \text{ಮ}^{\text{೩}}$ ಈ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಸಮತೆಯು ಪ್ರಾಸಂಗಿಕ ಇಲ್ಲವೆ ನಿಮಿತ್ತದಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾದದ್ದಲ್ಲ. ಅದು ಸತತವಿರುವಂಥದ್ದು, ಅಂದರೆ ನಿತ್ಯಸ್ವರೂಪದ್ದು ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಮತೆಯು ನಿತ್ಯವಾದದ್ದು, ಸತತವಾದದ್ದು ಮತ್ತು ನಿರಂತರವಾದದ್ದು. ಈ ಸಮತೆಯು ಪದ ಆಗಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಮದ ಆಗಲಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದಿಲ್ಲ. ಇಂಥ ನಿತ್ಯಸಮತೆಯಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ನಿತ್ಯಸಮ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮತೆಯನ್ನು $\equiv$ ಈ ಚಿನ್ಹದಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. $=$ ಇದು ಸಮತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ಚಿನ್ಹವಿರುವದು. ಅದನ್ನು ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ತಪ್ಪಾಗುವದೆಂದಲ್ಲ. ಆದರೆ ನಿತ್ಯಸಮತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವದು $\equiv$ ಈ ಚಿನ್ಹದ ವಿಶೇಷ ಗುಣವಿರುತ್ತದೆ.

೪·೨. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು ಕೆಲವು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುವಾ.

$$(\text{೨ಕ}+\text{ಗ})^{\text{೩}} \equiv (\text{೨ಕ})^{\text{೩}} + \text{೩}(\text{೨ಕ})^{\text{೨}}(\text{ಗ}) + \text{೩}(\text{೨ಕ})(\text{ಗ})^{\text{೨}} + (\text{ಗ})^{\text{೩}}$$
$$\equiv \text{೮ಕ}^{\text{೩}} + \text{೧೨ಕ}^{\text{೨}}\text{ಗ} + \text{೬ಕಗ}^{\text{೨}} + \text{ಗ}^{\text{೩}}.$$

$$(\text{ತ}+\text{೩ದ})^{\text{೩}} \equiv (\text{ತ})^{\text{೩}} + \text{೩}(\text{ತ})^{\text{೨}}(\text{೩ದ}) + \text{೩}(\text{ತ})(\text{೩ದ})^{\text{೨}} + (\text{೩ದ})^{\text{೩}}$$
$$\equiv \text{ತ}^{\text{೩}} + \text{೯ತ}^{\text{೨}}\text{ದ} + \text{೨೭ತದ}^{\text{೨}} + \text{೨೭ದ}^{\text{೩}}.$$

$$(\text{೪ಪ}+\text{೭ಮ})^{\text{೩}} \equiv (\text{೪ಪ})^{\text{೩}}+\text{೩}(\text{೪ಪ})^{\text{೨}}(\text{೭ಮ})+\text{೩}(\text{೪ಪ})(\text{೭ಮ})^{\text{೨}}+(\text{೭ಮ})^{\text{೩}}$$
$$\equiv \text{೬೪ಪ}^{\text{೩}}+\text{೩.೧೬ಪ}^{\text{೨}}\text{.೭ಮ}+\text{೩.೪ಪ.೪೯ಮ}^{\text{೨}}+\text{೩೪೩ಮ}^{\text{೩}}$$
$$\equiv \text{೬೪ಪ}^{\text{೩}} + \text{೩೩೬ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ} + \text{೫೮೮ಪಮ}^{\text{೨}} + \text{೩೪೩ಮ}^{\text{೩}}.$$

೪·೩. ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡದೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದೆವು. ಈಗ ಎರಡು ಪದಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$(\text{ಪ}-\text{ಮ})^{\text{೩}} \equiv (\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})^{\text{೨}}$$
$$\equiv (\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}^{\text{೨}} - \text{೨ಪಮ} + \text{ಮ}^{\text{೨}})$$
$$\equiv \text{ಪ}(\text{ಪ}^{\text{೨}} - \text{೨ಪಮ} + \text{ಮ}^{\text{೨}}) - \text{ಮ}(\text{ಪ}^{\text{೨}} - \text{೨ಪಮ}+\text{ಮ}^{\text{೨}})$$
$$\equiv \text{ಪ}^{\text{೩}} - \text{೨ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ} + \text{ಪಮ}^{\text{೨}} - \text{ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ} + \text{೨ಪಮ}^{\text{೨}} - \text{ಮ}^{\text{೩}}$$
$$\equiv \text{ಪ}^{\text{೩}} - \text{೩ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ} + \text{೩ಪಮ}^{\text{೨}} - \text{ಮ}^{\text{೩}}.$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ **ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ಘನವು ಮೊದಲನೇ ಪದದ ಘನ, ಉಣಾ ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಅಧಿಕ ಮೊದಲನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಉಣಾ ಎರಡನೇ ಪದದ ಘನದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.**

ಈ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಂಡಿಸಿ, $ಪ^೩ - ಮ^೩ - ೩ಪಮ\ (ಪ - ಮ)$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರಬಹುದು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಅದು **ಎರಡು ಪದಗಳ ಘನಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ ಉಣಾ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂದು** ಸಹ ಹೇಳಬಹುದು.

$$(ಪ-ಮ)^೩ \equiv ಪ^೩ - ೩ಪ^೨ಮ + ೩ಪಮ^೨ - ಮ^೩$$
$$\equiv ಪ^೩ - ಮ^೩ - ೩ಪ^೨ಮ + ೩ಪಮ^೨$$
$$\equiv ಪ^೩ - ಮ^೩ - ೩ಪಮ\ (ಪ - ಮ).$$

೪.೪. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು ಕೆಲವು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುವಾ.

$$(೨ಕ - ಗ)^೩ \equiv (೨ಕ)^೩ - ೩(೨ಕ)^೨(ಗ) + ೩(೨ಕ)(ಗ)^೨ - (ಗ)^೩$$
$$\equiv ೮ಕ^೩ - ೧೨ಕ^೨ಗ + ೬ಕಗ^೨ - ಗ^೩.$$

$$(ತ - ೩ದ)^೩ \equiv (ತ)^೩ - ೩(ತ)^೨(೩ದ) + ೩(ತ)(೩ದ)^೨ - (೩ದ)^೩$$
$$\equiv ತ^೩ - ೯ತ^೨ದ + ೨೭ತದ^೨ - ೨೭ದ^೩.$$

$$(೪ಪ-೭ಮ)^೩ \equiv (೪ಪ)^೩ - ೩\ (೪ಪ)^೨\ (೭ಮ)$$
$$+ ೩\ (೪ಪ)(೭ಮ)^೨ - (೭ಮ)^೩$$
$$\equiv ೬೪ಪ^೩ - ೩.\ ೧೬ಪ^೨.\ ೭ಮ + ೩.\ ೪ಪ.\ ೪೯ಮ^೨$$
$$- ೩೪೩ಮ^೩$$
$$\equiv ೬೪ಪ^೩ - ೩೩೬ಪ^೨ಮ + ೫೮೮ಪಮ^೨ - ೩೪೩ಮ^೩.$$

೪.೫. ಯಾವದೇ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ

ಸುಧಾರಿಸಿ $(ಪ+ಮ)^{೩}$ ಮತ್ತು $(ಪ-ಮ)^{೩}$ ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳ ವಿಷಯ-ದಲ್ಲಿಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೇರಿಸಬಹುದು.

ಯಾವದೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನವು ಮೊದಲನೇ ಪದದ ಘನ, ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಮೊದಲನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ, ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದದ ಘನ, ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ.

ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. $ಪ-ಮ$ ಈ ರಾಶಿಯು $ಪ+(-ಮ)$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ $(ಪ-ಮ)$ ದ **ಘನವು** ಮತ್ತು $ಪ+(-ಮ)$ ದ **ಘನವು** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಂತರವೂ ಇರಲಾರದು. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಂತೆ ನಾವು ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಆ ರಾಶಿಯು ಮೂಲತಃ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಆ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಅದರ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ತರುವಾಯ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯಬೇಕು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$(ಪ - ಮ)^{೩} \equiv \{ ಪ + (- ಮ) \}^{೩}$$
$$\equiv ಪ^{೩} + ೩ಪ^{೨}(- ಮ) + ೩ಪ(- ಮ)^{೨} + (- ಮ)^{೩}$$
$$\equiv ಪ^{೩} - ೩ಪ^{೨}ಮ + ೩ಪಮ^{೨} - ಮ^{೩}.$$

ಪರಿಚ್ಛೇದ ೪.೩ ರಲ್ಲಿ $(ಪ-ಮ)^{೩}$ ದ ಯಾವ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೋ ಅದೇ ಇದು ಇರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ೪.೪ ರೊಳಗಿನ ಕೊನೆಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆಯೇ ಬರೆದು ನೋಡುವಾ.

$$(೪ಪ - ೭ಮ)^{೩} \equiv \{ ೪ಪ + (- ೭ಮ) \}^{೩}$$
$$\equiv (೪ಪ)^{೩} + ೩(೪ಪ)^{೨}(-೭ಮ) + ೩(೪ಪ)(-೭ಮ)^{೨} + (-೭ಮ)^{೩}$$
$$\equiv ೬೪ಪ^{೩} + ೩.೧೬ಪ^{೨}(-೭ಮ) + ೩.೪ಪ.೪೯ಮ^{೨} + (-೩೪೩ಮ)^{೩}$$
$$\equiv ೬೪ಪ^{೩} - ೩೩೬ಪ^{೨}ಮ + ೫೮೮ಪಮ^{೨} - ೩೪೩ಮ^{೩}.$$

ಮತ್ತು ಇದೇ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಅಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಚ್ಛೇದ ೪.೩ ರೊಳಗಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರದ ವಿಷಯವಾಗಿ ನಿಯಮವನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು. **ಯಾವದೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನವು ಆ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಎರಡೂ ಪದಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅಧಿಕ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.** ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ರಾಶಿಯು ಮೂಲತಃ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರದಿದ್ದರೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ಆ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $(೪ಪ−೭ಮ)^{೩}$ ಇದರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಂತೆ ಮಾಡುವದು ಉಚಿತವಾಗುವದು.

$$(೪ಪ−೭ಮ)^{೩} \equiv \{೪ಪ + (−೭ಮ)\}^{೩}$$
$$\equiv (೪ಪ)^{೩} + (−೭ಮ)^{೩} + ೩(೪ಪ)(−೭ಮ)\{೪ಪ + (−೭ಮ)\}$$
$$\equiv ೬೪ಪ^{೩} − ೩೪೩ಮ^{೩} − ೮೪ಪಮ(೪ಪ − ೭ಮ).$$

೪.೬. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೇ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನಾವು ೩೧, ೩೯, ೯೮, ೧೦೪ ಮತ್ತು ೯೯೯ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾ.

$$(೩೧)^{೩} = (೩೦ + ೧)^{೩}$$
$$= (೩೦)^{೩} + (೧)^{೩} + ೩.೧.೩೦.(೩೦ + ೧)$$
$$= ೨೭೦೦೦ + ೧ + ೨೭೯೦$$
$$= ೨೯೭೯೧.$$

$$(೩೯)^{೩} = (೪೦ − ೧)^{೩}$$
$$= (೪೦)^{೩} − (೧)^{೩} − ೩.೧.೪೦.(೪೦ − ೧)$$
$$= ೬೪೦೦೦ − ೧ − ೪೬೮೦$$
$$= ೫೯೩೧೯.$$

$$(೯೮)^{೩} = (೧೦೦ − ೨)^{೩}$$
$$= (೧೦೦)^{೩} − (೨)^{೩} − ೩.೨.೧೦೦.(೧೦೦ − ೨)$$

= ೧೦೦೦೦೦೦ − ೮ − ೫೮೮೦೦

= ೯೪೧೧೯೨.

(೧೦೪)^{೩} = (೧೦೦ + ೪)^{೩}

= (೧೦೦)^{೩} + (೪)^{೩} + ೩. ೪. ೧೦೦. (೧೦೦ + ೪)

= ೧೦೦೦೦೦೦ + ೬೪ + ೧೨೪೮೦೦

= ೧೧೨೪೮೬೪.

(೯$\frac{೧}{೯}$)^{೩} = (೯)^{೩} + ($\frac{೧}{೯}$)^{೩} + ೩×೯×$\frac{೧}{೯}$×೯$\frac{೧}{೯}$

= ೭೨೯ + $\frac{೧}{೭೨೯}$ + ೨೭$\frac{೧}{೩}$

= ೭೫೬$\frac{೨೪೪}{೭೨೯}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೨.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

೧. ಪ+೫ಮ. ೨. ೪ಕ+ಗ. ೩. ೩ಸ−ಮ. ೪. ಯ−೨ರ.

೫. ೩ಪ+೨ಮ. ೬. ೪ಯ−೩ರ. ೭. ೬ಪ−೫ರ. ೮. ೭ಪ+೨ಬ.

೯. ೪ಯ+೫. ೧೦. ೩ಪ−೨. ೧೧. ಬ^{೨}+೧. ೧೨. ೩−೨ಯ^{೨}.

೧೩. ೨ಪ^{೨}+೫ಬ. ೧೪. ೮−೩ಮ^{೨}. ೧೫. ೩ಮ^{೩}+೨. ೧೬. ಪ−೪ಬ^{೩}.

೧೭. ೪ಯ − $\frac{ಲ}{೪}$. ೧೮. ೫ − $\frac{ಗ}{೫}$. ೧೯. ೩ + $\frac{೨ಯ}{೩}$. ೨೦. ಪ^{೩} + $\frac{ಬ^{೨}}{೩}$.

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

೨೧. ೪೫. ೨೨. ೮೭. ೨೩. ೫$\frac{೨}{೫}$. ೨೪. ೮$\frac{೨}{೯}$.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳಿರುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

೨೫. ಯ^{೩} + ೧೫ಯ^{೨} + ೭೫ಯ + ೧೨೫.

೨೬. ಕ್ಷ^{೩} − ೨೧ಕ್ಷ^{೨} + ೧೪೭ಕ್ಷ − ೩೪೩.

೨೭. ೮ಪ^{೩} − ೬೦ಪ^{೨}ಬ + ೧೫೦ಪಬ^{೨} − ೧೨೫ಬ^{೩}.

೨೮. ೨೧೬ಪ^{೩} − ೭೫೬ಪ^{೨}ಮ + ೮೮೨ಪಮ^{೨} − ೩೪೩ಮ^{೩}.

೨೯. ೬೪ರ^{೩} − ೨೭ಲ^{೩} − ೩೬ರಲ (೪ರ − ೩ಲ).

೩೦. ೭೨೯ಕ^{೩} + ೧೨೫ಗ^{೩} + ೧೩೫ಕಗ (೯ಕ + ೫ಗ).

೨.

$(ಪ \pm ಮ)(ಪ^{೨} \mp ಪಮ + ಮ^{೨})$

೫·೭. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ.

$$\begin{array}{rl} & ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨} \\ & ಪ + ಮ \\ \hline ಪ^{೩} - ಪ^{೨}ಮ + ಪಮ^{೨} & \\ + ಪ^{೨}ಮ - ಪಮ^{೨} + ಮ^{೩} & \\ \hline ಪ^{೩} \qquad + ಮ^{೩} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨} \\ & ಪ - ಮ \\ \hline ಪ^{೩} + ಪ^{೨}ಮ + ಪಮ^{೨} & \\ - ಪ^{೨}ಮ - ಪಮ^{೨} - ಮ^{೩} & \\ \hline ಪ^{೩} \qquad - ಮ^{೩} & \end{array}$$

ಮೇಲಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಹೀಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. **ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ, ಮತ್ತು ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಗೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ.** ನಾವು ಈ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$(ಪ + ಮ)(ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}) \equiv ಪ^{೩} + ಮ^{೩}$$

$$(ಪ - ಮ)(ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}) \equiv ಪ^{೩} - ಮ^{೩};$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಾವು ಹೀಗೆಯೂ ತರ್ಕಿಸಬಹುದು,

$$(ಪ^{೩} + ಮ^{೩}) \div (ಪ + ಮ) = ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨} \quad ಮತ್ತು$$

$$(ಪ^{೩} - ಮ^{೩}) \div (ಪ - ಮ) = ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}.$$

ಪರಿಣಾಮದಲ್ಲಿ $-ಮ$ ಮತ್ತು $+(-ಮ)$ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ $ಮ$ ಮತ್ತು $-(-ಮ)$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಏನೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಲ್ಲಿಯ ಎರಡನೇ ಭಾಗವು ಮೊದಲನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಭೂತವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ,

(ಪ − ಮ)(ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨})

≡ { ಪ + (− ಮ) } { ಪ^{೨} − (ಪ)(− ಮ) + (− ಮ)^{೨} }

≡ (ಪ)^{೩} + (− ಮ)^{೩}

≡ ಪ^{೩} − ಮ^{೩}.

೪·೮. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡುವದರಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಉ. ೧. ೪ಕ^{೨} − ೧೦ಕಗ + ೨೫ಗ^{೨} ಮತ್ತು ೨ಕ + ೫ಗ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೨ಕ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು ೫ಗ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ೪ಕ^{೨} = ಪ^{೨}, ೧೦ಕಗ = ಪಮ, ಮತ್ತು ೨೫ಗ^{೨} = ಮ^{೨}. ಆದುದರಿಂದ,

(೨ಕ + ೫ಗ)(೪ಕ^{೨} − ೧೦ಕಗ + ೨೫ಗ^{೨}) = (ಪ + ಮ)(ಪ^{೨} − ಪಮ + ಮ^{೨})

= ಪ^{೩} + ಮ^{೩}

= (೨ಕ)^{೩} + (೫ಗ)^{೩}

= ೮ಕ^{೩} + ೧೨೫ಗ^{೩}.

ಉ. ೨. ೮ಯ − ೩ಕ್ಷ ಮತ್ತು ೬೪ಯ^{೨} + ೨೪ಯಕ್ಷ + ೯ಕ್ಷ^{೨} ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

(೮ಯ − ೩ಕ್ಷ)(೬೪ಯ^{೨} + ೨೪ಯಕ್ಷ + ೯ಕ್ಷ^{೨})

= (೮ಯ − ೩ಕ್ಷ) { (೮ಯ)^{೨} + (೮ಯ)(೩ಕ್ಷ) + (೩ಕ್ಷ)^{೨} }

= (೮ಯ)^{೩} − (೩ಕ್ಷ)^{೩}

= ೫೧೨ಯ^{೩} − ೨೭ಕ್ಷ^{೩}.

ಉ. ೩. ೪೯ರ^{೨} − ರಲ + $\frac{೧}{೪೯}$ಲ^{೨} ಇದಕ್ಕೆ ೭ರ + $\frac{೧}{೭}$ಲ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

(೭ರ + $\frac{೧}{೭}$ಲ)(೪೯ರ^{೨} − ರಲ + $\frac{೧}{೪೯}$ಲ^{೨})

= (೭ರ + $\frac{೧}{೭}$ಲ) { (೭ರ)^{೨} − (೭ರ)($\frac{೧}{೭}$ಲ) + ($\frac{೧}{೭}$ಲ)^{೨} }

= (೭ರ)^{೩} + ($\frac{೧}{೭}$ಲ)^{೩}

= ೩೪೩ರ^{೩} + $\frac{೧}{೩೪೩}$ಲ^{೩}.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೩.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. $ಯ + ೫$, $ಯ^{೨} - ೫ಯ + ೨೫$.

೨. $ಯ - ೭$, $ಯ^{೨} + ೭ಯ + ೪೯$.

೩. $೨ಯ + ೩$, $೪ಯ^{೨} - ೬ಯ + ೯$.

೪. $೩ರ - ೫$, $೯ರ^{೨} + ೧೫ರ + ೨೫$.

೫. $೫ - ೪ಕ$, $೨೫ + ೨೦ಕ + ೧೬ಕ^{೨}$.

೬. $೯ + ೨ಕ$, $೮೧ - ೧೮ಕ + ೪ಕ^{೨}$.

೭. $೫ಕ - ಗ$, $೨೫ಕ^{೨} + ೫ಕಗ + ಗ^{೨}$.

೮. $೮ಯ - ೫ಕ$, $೬೪ಯ^{೨} + ೪೦ಕಯ + ೨೫ಕ^{೨}$.

೯. $೭ಕ್ಷ - \frac{೨}{೩}$, $೪೯ಕ್ಷ^{೨} + ೪\frac{೨}{೩}ಕ್ಷ + \frac{೪}{೯}$.

೧೦. $೩ಕ್ಷ + \frac{೧}{೩}$, $೯ಕ್ಷ^{೨} - ಕ್ಷ + \frac{೧}{೯}$.

೧೧. $೧ + \frac{೪}{೭}ಪ$, $೧ - \frac{೪}{೭}ಪ + \frac{೧೬}{೪೯}ಪ^{೨}$.

೧೨. $\frac{೨}{೩}ಪ - \frac{೪}{೫}ಬ$, $\frac{೪}{೯}ಪ^{೨} + \frac{೮}{೧೫}ಪಬ + \frac{೧೬}{೨೫}ಬ^{೨}$.

೧೩. $೪ಯಕ್ಷ + ೧$, $೧೬ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೨} - ೪ಯಕ್ಷ + ೧$.

೧೪. $೩ - ೪ಪಬ$, $೯ + ೧೨ಪಬ + ೧೬ಪ^{೨}ಬ^{೨}$.

೧೫. $೨ಪಫ - ೩ಬಮ$, $೪ಪ^{೨}ಫ^{೨} + ೬ಪಫಬಮ + ೯ಬ^{೨}ಮ^{೨}$.

೧೬. $೮ಯ + ೧೧ರಲ$, $೬೪ಯ^{೨} - ೮೮ಯರಲ + ೧೨೧ರ^{೨}ಲ^{೨}$.

೧೭. $೩ಯ^{೨} + ೫ಕ್ಷ^{೨}$, $೯ಯ^{೪} - ೧೫ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೨} + ೨೫ಕ್ಷ^{೪}$.

೧೮. $೨ಯ^{೩} - ೩ಕ್ಷ^{೩}$, $೪ಯ^{೬} + ೬ಯ^{೩}ಕ್ಷ^{೩} + ೯ಕ್ಷ^{೬}$.

೧೯. $೫ಪ^{೩} + ೭ಬ^{೩}$, $೨೫ಪ^{೬} - ೩೫ಪ^{೩}ಬ^{೩} + ೪೯ಬ^{೬}$.

೨೦. $೨ಪ^{೪} - ೯ಬ^{೪}$, $೪ಪ^{೮} + ೧೮ಪ^{೪}ಬ^{೪} + ೮೧ಬ^{೮}$.

ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

೨೧. $೬೪ಯ^{೩} + ೧೨೫ಲ^{೩} = (೪ಯ + ೫ಲ)$ (.............................).

೨೨. $೨೭ರ^{೩} - ೩೪೩ಲ^{೩}$ = (............) $(೯ರ^{೨} + ೨೧ರಲ + ೪೯ಲ^{೨})$.

೨೩. $೧೨೫ - ೭೨೯ಪ^{೬}$ = $(೫ - ೯ಪ^{೨})$ (.............................).

೨೪. ೧೩೩೧ಯ^{೩} + ೨೧೬ರ^{೩}ಲ^{೩}

= (...........) (೧೨೧ಯ^{೨} − ೬೬ಯರಲ + ೩೬ರ^{೨}ಲ^{೨}).

೨೫. ೩೪೩ಪ^{೩} − ೫೧೨ಕ್ಷ^{೩} = (೭ಪ − ೮ಕ್ಷ) (.........................).

೨೬. (೮ಯ^{೩} − ೩೪೩ಲ^{೩}) ÷ (೨ಯ − ೭ಲ) = ...

೨೭. (೨೭ರ^{೩} + ೧೨೫ಲ^{೩}) ÷ (೩ರ + ೫ಲ) = ...

೨೮. (೧ − ೨೧೬ಯ^{೬}) ÷ (೧ + ೬ಯ^{೨} + ೩೬ಯ^{೪}) = ...

೨೯. (೧೦೦೦ಕ್ಷ^{೬} + ೭೨೯) ÷ (೧೦ಕ್ಷ^{೨} + ೯) = ...

೩೦. (೨೧೬ಯ^{೩}ಕ್ಷ^{೩} − ೧೨೫ಪ^{೩}) ÷ (೩೬ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೨} + ೩೦ಪಯಕ್ಷ + ೨೫ಪ^{೨})

= ....

೩೧. (೫೧೨ಪ^{೩} − ೩೪೩ಲ^{೩}) ÷ (........) = (೬೪ಪ^{೨} + ೫೬ಪಲ + ೪೯ಲ^{೨}).

೩೨. (೧೩೩೧ಲ^{೩} + ೧೨೫ವ^{೩}) ÷ (......) = ೧೨೧ಲ^{೨} − ೫೫ಲವ + ೨೫ವ^{೨}.

೩೩. (೬೪ಯ^{೩} − ೭೨೯ಲ^{೩}) ÷ (೧೬ಯ^{೨} + ೩೬ಯಲ + ೮೧ಲ^{೨}) = ...

೩೪. (...........) ÷ (೩ಕ − ೮ಗ) = ೯ಕ^{೨} + ೨೪ಕಗ + ೬೪ಗ^{೨}.

೩೫. (.... ....) ÷ (೨೫ಯ^{೨} − ೩೫ಯಕ್ಷ + ೪೯ಕ್ಷ^{೨}) = ೫ಯ + ೭ಕ್ಷ.

೩.

(ಯ + ಪ)(ಯ + ಬ)(ಯ + ಮ)

೪·೯. ಹಿಂದೆ ನಾವು (ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ) ≡ ಯ^{೨}+(ಪ+ಬ)ಯ+ಪಬ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ನಾವು ಈಗ (ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಮ) ದ ವಿಸ್ತಾರವು ಹೇಗಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು, ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಪದವು ಒಂದೇ ಇರುವ (ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಮ) ದಂಥ **ಮೂರು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು** ಯಾವ ಸ್ವರೂಪದ್ದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

(ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಮ) ≡ { ಯ^{೨}+(ಪ+ಬ)ಯ+ಪಬ } (ಯ+ಮ)

≡ ಯ { ಯ^{೨} + (ಪ + ಬ)ಯ + ಪಬ }

+ ಮ { ಯ^{೨} + (ಪ + ಬ)ಯ + ಪಬ }

≡ ಯ^{೩} + (ಪ+ಬ)ಯ^{೨}+ಪಬಯ+ಮಯ^{೨}+(ಪ+ಬ)ಮಯ+ಪಬಮ

≡ ಯ^{೩} +(ಪ+ಬ)ಯ^{೨}+ಮಯ^{೨}+ಪಬಯ+(ಬಮ+ಮಪ)ಯ+ಪಬಮ

≡ ಯ^{೩}+(ಪ+ಬ+ಮ)ಯ^{೨} + (ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ)ಯ + ಪಬಮ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನಂದರೆ, **ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಪದವಿರುವ ಮೂರು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು, ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ಘನ, ಅಧಿಕ ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಅಧಿಕ ಸಾಧಾರಣ ಪದ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮೂರು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಅಧಿಕ ಆ ಮೂರೂ ಭಿನ್ನ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.**

ಉ. ೧. ಯ+೧, ಯ+೨ ಮತ್ತು ಯ+೩ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)

= ಯ^{೩} + (೧+೨+೩)ಯ^{೨} + (೧.೨ + ೨.೩ + ೩.೧)ಯ + ೧.೨.೩

= ಯ^{೩} + ೬ಯ^{೨} + ೧೧ಯ + ೬.

ಉ. ೨. ಕ್ಷ+೩, ಕ್ಷ+೫, ಮತ್ತು ಕ್ಷ+೧೧ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

(ಕ್ಷ+೩) (ಕ್ಷ+೫) (ಕ್ಷ+೧೧)

= ಕ್ಷ^{೩} + (೩+೫+೧೧)ಕ್ಷ^{೨} + (೩.೫+೫.೧೧ + ೧೧.೩) ಕ್ಷ + ೩.೫.೧೧

= ಕ್ಷ^{೩} + ೧೯ಕ್ಷ^{೨} + ೧೦೩ಕ್ಷ + ೧೬೫.

ಉ. ೩. ಪ − ೫, ಪ + ೭ ಮತ್ತು ಪ + ೪ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

(ಪ − ೫) (ಪ + ೭) (ಪ + ೪) = ಪ^{೩} + (− ೫ + ೭ + ೪) ಪ^{೨}

+ (−೫.೭+೭.೪−೫.೪)ಪ−೫.೭.೪

= ಪ^{೩} + ೬ಪ^{೨} − ೨೭ಪ − ೧೪೦.

ಉ. ೪. ೨ಯ − ೩ಕ, ೨ಯ + ೭ಗ ಮತ್ತು ೨ಯ − ೫ಘ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$(೨ಯ-೩ಕ)(೨ಯ+೭ಗ)(೨ಯ-೫ಫ)=(೨ಯ)^{೩}+(-೩ಕ+೭ಗ-೫ಫ)(೨ಯ)^{೨}$
$+(-೩ಕ.೭ಗ-೫ಫ.೭ಗ+೩ಕ.೫ಫ)(೨ಯ)+(-೩ಕ)(೭ಗ)(-೫ಫ)$
$=೮ಯ^{೩}+೪(೭ಗ-೩ಕ-೫ಫ)ಯ^{೨}+೨(೧೫ಕಫ-೨೧ಕಗ-೩೫ಗಫ)ಯ$
$+೧೦೫ ಕಗಫ.$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

ಕೆಳಗಿನ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. ಯ+೨, ಯ+೪, ಯ+೭. ೨. ಯ-೧, ಯ-೩, ಯ-೫.

೩. ಕ್ಷ+೪, ಕ್ಷ+೧, ಕ್ಷ-೨. ೪. ಮ-೭, ಮ-೩, ಮ+೧.

೫. ಪ-೧, ಪ-೫, ಪ+೬. ೬. ೧+ಯ, ೪+ಯ, ೮+ಯ.

೭. ೩-ಕ್ಷ, ೭-ಕ್ಷ, ೧೦-ಕ್ಷ. ೮. ೨ಯ+೧, ೨ಯ+೩, ೨ಯ+೫.

೯. ೩ಕ್ಷ-೨, ೩ಕ್ಷ-೪, ೩ಕ್ಷ-೫. ೧೦. ೪ಕ್ಷ-೧, ೪ಕ್ಷ+೩, ೪ಕ್ಷ+೭.

೧೧. ೫ಕ್ಷ-೬, ೫ಕ್ಷ-೩, ೫ಕ್ಷ+೧. ೧೨. ೭ಕ್ಷ-೧, ೭ಕ್ಷ-೫, ೭ಕ್ಷ+೬.

೧೩. ೨ಕ್ಷ-ಕ, ೨ಕ್ಷ+೪ಕ, ೨ಕ್ಷ-೩ಕ. ೧೪. ೪ಪ-೩ಕ, ೪ಪ-೫ಕ, ೪ಪ+೭ಕ.

೧೫. ೨ಗ+ಯ, ೩ಗ+ಯ, ೬ಗ+ಯ. ೧೬. ೫ನ-ಯ, ೪ನ-ಯ, ೮ನ-ಯ.

೧೭. ೫ಯ+೩ಕ, ೫ಯ+೬ಗ, ೫ಯ+೮ಗ.

೧೮. ೮ಯ-ಕ, ೮ಯ+೩ಗ, ೮ಯ-೫ಫ.

೧೯. ೨ಪ+೩ಯ, ೪ಬ+೩ಯ, ೭ಮ+೩ಯ.

೨೦. ಪ-೪ಯ, ೩ಪ-೪ಯ, ೫ಪ-೪ಯ.

ಐದನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಹಿಂದಿನ ಕೆಲವು ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಜನೆ

೧.

$(ಪ+ಮ)^{೨} \equiv ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}$; $(ಪ-ಮ)^{೨} \equiv ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಮ^{೨}$.

೫.೧. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಯಾವದೇ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $೪ಯ+೯ಕ್ಷ$ದ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು $(೪ಯ)^{೨}+೨(೪ಯ)(೯ಕ್ಷ)+(೯ಕ್ಷ)^{೨}$ ಅಂದರೆಯೇ $೧೬ಯ^{೨}+೭೨ಯಕ್ಷ+೮೧ಕ್ಷ^{೨}$ ಎಂದು, ಅಥವಾ $೫ಯ-೮ಕ್ಷ$ದ **ವರ್ಗ**ವನ್ನು ಬರೆಯುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು $(೫ಯ)^{೨}-೨(೫ಯ)(೮ಕ್ಷ)+(೮ಕ್ಷ)^{೨}$ ಅಂದರೆಯೇ $೨೫ಯ^{೨}-೮೦ಯಕ್ಷ+೬೪ಕ್ಷ^{೨}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಯಾವದೊಂದು ಪದಾವಲಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವ-ವಾದರೆ ಅದನ್ನು ಇಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದೇ? $ಪ+ಬ+ಮ$ ಈ **ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು** ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು $ಪ+ಬ+ಮ$ ದ ವರ್ಗವೆಂದರೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ಗುಣಿಲೆ $ಪ+ಬ+ಮ$. ಅಂದ ಮೇಲೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ದ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಾದರೆ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಂತೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ಕ್ಕೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು ಅತ್ಯವಶ್ಯವಿದೆಯೇ?

$$
\begin{array}{llllll}
 & ಪ+ಬ+ಮ & & & & \\
\times & ಪ+ಬ+ಮ & & & & \\
\hline
 & ಪ^{೨}+ಪಬ+ಪಮ & & & & \\
 & \quad +ಪಬ & & +ಬ^{೨}+ಬಮ & & \\
 & & +ಪಮ & & +ಬಮ & +ಮ^{೨} \\
\hline
 & \multicolumn{5}{l}{ಪ^{೨}+೨ಪಬ+೨ಪಮ+ಬ^{೨}+೨ಬಮ+ಮ^{೨}}
\end{array}
$$

ಅಂದರೆ $ಪ^{೨}+ಬ^{೨}+ಮ^{೨}+೨ಪಬ+೨ಪಮ+೨ಬಮ$.

$ಪ+ಬ+ಮ$ ಈ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ $ಬ+ಮ$ ಈ ಭಾಗಕ್ಕೆ ನಾವು ಆ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ $ಪ+ಬ+ಮ$ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು

ಪ + ಅ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ **ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ** ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ $(ಪ + ಬ + ಮ)^{೨} = (ಪ + ಅ)^{೨}$

$= ಪ^{೨} + ೨ಪಅ + ಅ^{೨}$

$= ಪ^{೨} + ೨ಪ(ಬ + ಮ) + (ಬ + ಮ)^{೨}$ [ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮೊದಲಿನ (ಬ + ಮ) ಬರೆಯಲಾಗಿ]

$= ಪ^{೨} + ೨ ಪಬ + ೨ ಪಮ + ಬ^{೨} + ೨ ಬಮ + ಮ^{೨}$

$= ಪ^{೨} + ಬ^{೨} + ಮ^{೨} + ೨ಪಬ + ೨ಪಮ + ೨ಬಮ.$

ಇಲ್ಲಿ **ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಮೂರು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುವದೆಂದು** ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು.

ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಎಷ್ಟಾಗಬಹುದು? ಪ+ಬ+ಮ+ಸ ದ ವರ್ಗವು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಅದೆಷ್ಟಾಗಬಹುದು?

$(ಪ+ಬ+ಮ+ಸ)^{೨} = ಪ^{೨}+೨ಪ(ಬ+ಮ+ಸ)+(ಬ+ಮ+ಸ)^{೨}$

$= ಪ^{೨}+೨ಪಬ+೨ಪಮ+೨ಪಸ+ಬ^{೨}+ಮ^{೨}+ಸ^{೨}$
$+೨ಬಮ+೨ಬಸ+೨ಮಸ$

$= ಪ^{೨}+ಬ^{೨}+ಮ^{೨}+ಸ^{೨}+೨ಪಬ+೨ಪಮ+೨ಪಸ$
$+೨ಬಮ+೨ಬಸ+೨ಮಸ.$

ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ **ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುವದೆಂದು** ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು.

ಇದರಂತೆಯೇ ನಾವು ಪದಾವಲಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತ ಹೋದಂತೆ **ಎಷ್ಟೇ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು** ಇರುವದೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವು ಪದಾವಲಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$(ಯ+೨ರ+೫ಲ)^{೨}$

$=(ಯ)^{೨}+(೨ರ)^{೨}+(೫ಲ)^{೨}+೨(ಯ)(೨ರ)+೨(ಯ)(೫ಲ)+೨(೨ರ)(೫ಲ)$

$=ಯ^{೨}+೪ರ^{೨}+೨೫ಲ^{೨}+೪ಯರ+೧೦ಯಲ+೨೦ರಲ.$

$(೨ಯ-೫ರ+೪ಲ)^{೨}$

$=(೨ಯ)^{೨}+(-೫ರ)^{೨}+(೪ಲ)^{೨}+೨(೨ಯ)(-೫ರ)+೨(೨ಯ)(೪ಲ)$
$+೨(-೫ರ)(೪ಲ)$

$=೪ಯ^{೨}+೨೫ರ^{೨}+೧೬ಲ^{೨}-೨೦ಯರ+೧೬ಯಲ-೪೦ರಲ.$

$(೩ಕ-೨ಗ-೪ಘ)^{೨}$

$=(೩ಕ)^{೨}+(-೨ಗ)^{೨}+(-೪ಘ)^{೨}+೨(೩ಕ)(-೨ಗ)+೨(೩ಕ)(-೪ಘ)$
$+೨(-೨ಗ)(-೪ಘ)$

$=೯ಕ^{೨}+೪ಗ^{೨}+೧೬ಘ^{೨}-೧೨ಕಗ-೨೪ಕಘ+೧೬ಗಘ.$

$(೫ಯ-೪ರ-೨ಲ+೩ವ)^{೨}$

$=(೫ಯ)^{೨}+(-೪ರ)^{೨}+(-೨ಲ)+(೩ವ)^{೨}+೨(೫ಯ)(-೪ರ)$
$+೨(೫ಯ)(-೨ಲ)+೨(೫ಯ)(೩ವ)+೨(-೪ರ)(-೨ಲ)+೨(-೪ರ)(೩ವ)$
$+೨(-೨ಲ)(೩ವ)$

$=೨೫ಯ^{೨}+೧೬ರ^{೨}+೪ಲ^{೨}+೯ವ^{೨}-೪೦ಯರ-೨೦ಯಲ+೩೦ಯವ$
$+೧೬ರಲ-೨೪ರವ-೧೨ಲವ.$

ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದನಂತರ ನಡುವಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವದೇ ಪದಾವಲಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

೧. $೫ಯ+೧೨$. ೨. $೯ಯ-೭$. ೩. $೧೫ಪ+೨ಬ$.

೪. $೧೪ಪ-೫ಮ$. ೫. $೪ಯ+೫ರ+೨ಲ$. ೬. $೩ಯ-೭ರ+೪ಲ$.

೭. $೨ಕ-೫ಗ-೩ಘ$. ೮. $೩ಪ+೭ಬ+೨$. ೯. $೪ಕ-೩ಗ+೭$.

೧೦. $೭ಪ-೨ಬ-೧$. ೧೧. $೩-೪ಯ-೫ಕ್ಷ$. ೧೨. $೨-೮ಯ+೩ಕ್ಷ$.

೧೩. ಯ^{೨}+ಯ+೧. ೧೪. ಕ್ಷ^{೨}+೨ಕ್ಷ+೧. ೧೫. ಪ^{೨}−೪ಪ+೪.

೧೬. ಪ^{೨}+೨ಪಬ+೨ಬ^{೨}. ೧೭. ಯ^{೨}−೩ಯಕ್ಷ+೩ಕ್ಷ^{೨}.

೧೮. ೪+೨ಯ+ಯ^{೨}. ೧೯. ೮−೪ಯ+೩ಯ^{೨}.

೨೦. ಯ^{೨}+ಕ್ಷ^{೨}+೪. ೨೧. ಮ^{೪}−ಮ^{೨}−೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳಿರುವವೆಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ:

೨೨. ಪ^{೨} + ೯ಬ^{೨} + ೧೬ಮ^{೨} + ೬ಪಬ + ೮ಪಮ + ೨೪ಬಮ.

೨೩. ೪ಕ^{೨} − ೮ಕಖ + ೪ಖ^{೨} − ೧೨ಖಗ + ೯ಗ^{೨} + ೧೨ಕಗ.

೨೪. ೨೫ಪ^{೨} + ೪ಬ^{೨} + ೯ಮ^{೨} − ೨೦ಪಬ + ೧೨ಬಮ − ೩೦ಪಮ.

೨೫. ೧೬ಯ^{೨} + ರ^{೨} + ೪ಲ^{೨} − ೮ಯರ − ೪ರಲ + ೧೬ಯಲ.

ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ:

೨೬. (೨ಯ + ೩ರ........)^{೨} = ... + ೨೫ಲ^{೨}........ − ೨೦ಯಲ........

೨೭. (೩ಪ........)^{೨} = ... + ೪ಬ^{೨} + ಮ^{೨} − ೧೨ಪಬ........ + ೪ಬಮ.

೨೮. (.......−೪ಗ.......)^{೨}=೪ಕ^{೨}........+೯ಫ^{೨}−೧೬ಕಗ+೧೨ಕಫ........

ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ:

೨೯. (ಪ − ೨ಬ + ೪ಮ)^{೨} + (೨ಪ + ಬ − ೩ಮ)^{೨}.

೩೦. (೨ಯ − ೪ರ + ೩ಲ)^{೨} − (ಯ − ೫ರ − ೨ಲ)^{೨}.

೩೧. (೩ಕ − ೨ಗ + ೪ಫ) − (೨ಕ − ೫ಕ − ಫ)^{೨} + (ಕ + ೬ಗ − ೨ಫ)^{೨}.

೨.

(ಪ + ಮ) (ಪ − ಮ) = ಪ^{೨} − ಮ^{೨}

೫·೨. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೪ಯ+೧೧ಕ್ಷ ಮತ್ತು ೪ಯ−೧೧ಕ್ಷ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾ-ಕಾರವನ್ನು ಹೇಳುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು ೧೬ಯ^{೨}−೧೨೧ಕ್ಷ^{೨} ಇರುವದೆಂದು ನಾವು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಳಬಲ್ಲೆವು. ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು **ತ್ರಿಪದ** ಅಥವಾ **ಬಹುಪದ** ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅನೇಕಸಾರೆ ಇದೇ ಸೂತ್ರದ

ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಅದನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಬಲ್ಲೆವೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಮತ್ತು $ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಈ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ $ಪ^{೨} + ಮ^{೨}$ ಈ ಸಾಧಾರಣ ಭಾಗಕ್ಕಾಗಿ ಅ ಈ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ-ದರೆ ನಮಗೆ ಆ ರಾಶಿಗಳನ್ನು $ಅ - ಪಮ$ ಮತ್ತು $ಅ + ಪಮ$ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ $(ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨})(ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨})$

$$= (ಅ - ಪಮ)(ಅ + ಪಮ)$$
$$= ಅ^{೨} - ಪ^{೨}ಮ^{೨}$$
$$= (ಪ^{೨} + ಮ^{೨})^{೨} - ಪ^{೨}ಮ^{೨} \quad (\because ಅ = ಪ^{೨} + ಮ^{೨})$$
$$= ಪ^{೪} + ೨ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪} - ಪ^{೨}ಮ^{೨}$$
$$= ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}.$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡುಬರುವದು. **ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ, ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಗುಣಾ-ಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದು.** ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂತ್ರ-ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು:

$$(ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨})(ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}) \equiv ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}.$$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವು ನಮಗೆ ಬಹಳ ಸಲ ಆಗುವದರಿಂದ ಅದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು.

೫.೩. $(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ) \equiv ಪ^{೨} - ಮ^{೨}$ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಕೆಳಗೆ ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಕೆಲವು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಉ.೧. $೪ಕ + ೫ಗ - ೭ಘ$ ಮತ್ತು $೪ಕ + ೫ಗ + ೭ಘ$ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾ-ಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. $೪ಕ + ೫ಗ$ ಇದನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

(೪ಕ+೫ಗ−೭ಘ)(೪ಕ+೫ಗ+೭ಘ)=(ಅ−೭ಘ)(ಅ+೭ಘ)*

=ಅ^2−೪೯ಘ^2*

=(೪ಕ+೫ಗ)^2−೪೯ಘ^2 [∵ ಅ=೪ಕ+೫ಗ]

=೧೬ಕ^2+೪೦ಕಗ+೨೫ಗ^2−೪೯ಘ^2.

ಉ. ೨. ೮ಪ − ೯ಬ + ೪ಮ ಮತ್ತು ೮ಪ + ೯ಬ − ೪ಮ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ೯ಬ − ೪ಮ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ.

(೮ಪ − ೯ಬ + ೪ಮ) (೮ಪ + ೯ಬ − ೪ಮ)

= { ೮ಪ − (೯ಬ − ೪ಮ) } { ೮ಪ + (೯ಬ − ೪ಮ) }

= (೮ಪ − ಅ) (೮ಪ + ಅ)*

= ೬೪ಪ^2 − ಅ^2*

= ೬೪ಪ^2 − (೯ಬ − ೪ಮ)^2 [∵ ಅ = ೯ಬ − ೪ಮ]

= ೬೪ಪ^2 − (೮೧ಬ^2 − ೭೨ಬಮ + ೧೬ಮ^2)

= ೬೪ಪ^2 − ೮೧ಬ^2 + ೭೨ಬಮ − ೧೬ಮ^2.

ಉ. ೩. ೫ಯ + ೪ರ − ೩ಲ − ೭ವ ಮತ್ತು ೫ಯ + ೪ರ + ೩ಲ + ೭ವ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೫ಯ + ೪ರ ವನ್ನು ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು ೩ಲ + ೭ವ ವನ್ನು ಮ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

(೫ಯ + ೪ರ − ೩ಲ − ೭ವ) (೫ಯ + ೪ರ + ೩ಲ + ೭ವ)

= { (೫ಯ + ೪ರ) − (೩ಲ + ೭ವ) } { (೫ಯ + ೪ರ) + (೩ಲ + ೭ವ) }

= (ಪ − ಮ) (ಪ + ಮ)*

= ಪ^2 − ಮ^2*

= (೫ಯ + ೪ರ)^2 − (೩ಲ + ೭ವ)^2 [ಪ ಮತ್ತು ಮ ಗಳ ಮೊದಲಿನ ಬೆಲೆ-ಗಳನ್ನು ಇಡಲಾಗಿ]

= (೨೫ಯ^2 + ೪೦ಯರ + ೧೬ರ^2) − (೯ಲ^2 + ೪೨ಲವ + ೪೯ವ^2)

= ೨೫ಯ^2 + ೪೦ಯರ + ೧೬ರ^2 − ೯ಲ^2 − ೪೨ಲವ − ೪೯ವ^2.

---

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ನಂತರ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಬಹುದು.

೫·೪. ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಕೃತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಮುಂದಿನ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿಯು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವದು. $(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ) \equiv ಪ^{೨}-ಮ^{೨}$ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು ಒಂದೇ ಇರುವ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಿ ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು. $೩ಯ+೨ರ-೫ಲ-೮ವ$ ಮತ್ತು $೩ಯ-೨ರ+೫ಲ-೮ವ$ ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ೩ಯ ದ ಹಿಂದೆ + ಚಿನ್ಹವಿದ್ದು ೮ವ ದ ಹಿಂದೆ − ಚಿನ್ಹವಿರುವದು. ಇದರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ೨ರ ದ ಹಿಂದೆ ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ + ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ −, ಹಾಗೂ ೫ಲ ದ ಹಿಂದೆ ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ − ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ +, ಅಂದರೆ ಭಿನ್ನ ಚಿನ್ಹಗಳಿರುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ $೩ಯ-೮ವ$ ಎಂದು ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು $೨ರ-೫ಲ$ ಎಂದು ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರಾಶಿಗಳ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು $ಪ+ಮ$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ, ಎಂದರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು $ಪ-ಮ$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ, ಅಂದರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ $(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ) \equiv ಪ^{೨}-ಮ^{೨}$ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು.

$$(೩ಯ+೨ರ-೫ಲ-೮ವ)(೩ಯ-೨ರ+೫ಲ-೮ವ)$$
$$=\{(೩ಯ-೮ವ)+(೨ರ-೫ಲ)\}\{(೩ಯ-೮ವ)-(೨ರ-೫ಲ)\}^{*}$$
$$=(೩ಯ-೮ವ)^{೨}-(೨ರ-೫ಲ)^{೨}$$
$$=(೯ಯ^{೨}-೪೮ಯವ+೬೪ವ^{೨})-(೪ರ^{೨}-೨೦ರಲ+೨೫ಲ^{೨})$$
$$=೯ಯ^{೨}-೪೮ಯವ+೬೪ವ^{೨}-೪ರ^{೨}+೨೦ರಲ-೨೫ಲ^{೨}.$$

---

*ಇದರ ಮುಂದಿನ ಹಂತವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆದಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಕಠಿಣವೆನಿಸಿದರೆ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $೩ಯ-೮ವ$ ಮತ್ತು $೨ರ-೫ಲ$ ಇವುಗಳಿಗಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ

ಪ ಮತ್ತು ಮ ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ಎರಡು ವರ್ಣಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸ-ಬೇಕು, ಅಂದರೆ ಮುಂದಿನ ಹಂತವು (ಪ + ಮ)(ಪ − ಮ) ಆಗುವದು, ಅದರ ಮುಂದಿನ ಹಂತವು ಪ^{೨}−ಮ^{೨} ಇದು ಇರುವದು. ಈಗ ಇಲ್ಲಿ ಪ ಗಾಗಿ ೩ಯ−೮ವ ಮತ್ತು ಮ ಗಾಗಿ ೨ರ−೫ಲ ಬರೆದರೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮುಂದಿನ ಹಂತವು (೩ಯ−೮ವ)^{೨} − (೨ರ−೫ಲ)^{೨} ಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

೧. ಕ+ಗ+ಘ, ಕ+ಗ−ಘ. ೨. ಕ−ಗ+ಘ, ಕ+ಗ+ಘ.

೩. ಕ−ಗ+ಘ, ಕ+ಗ−ಘ. ೪. ೩ಪ−ಬ+೪ಮ, ೩ಪ+ಬ+೪ಮ.

೫. ೫ಪ−೨ಬ+ಮ, ೫ಪ+೨ಬ−ಮ. ೬. ೨ಯ−೪ರ−೩ಲ, ೨ಯ+೪ರ−೩ಲ.

೭. ೩ಕ−೭ಗ+೮ಘ, ೩ಕ+೭ಗ−೮ಘ. ೮. ೫ಯ−೩ರ+೭ಲ, ೩ರ+೭ಲ−೫ಯ.

೯. ಯ^{೨}+೨ಯರ+೨ರ^{೨}, ಯ^{೨}−೨ಯರ−೨ರ^{೨}.

೧೦. ೩ಯ^{೨}−ಯಲ−ಲ^{೨}, ೩ಯ^{೨}+ಯಲ−ಲ^{೨}.

೧೧. ೫ಪ^{೨}−೩ಪಬ+೨ಬ^{೨}, ೫ಪ^{೨}+೩ಪಬ−೨ಬ^{೨}.

೧೨. ೬ಕ^{೨}−೭ಕಗ+೩ಗ^{೨}, ೩ಗ^{೨}+೭ಕಗ−೬ಕ^{೨}.

೧೩. ಯ^{೨}+ಯ+೧, ಯ^{೨}−ಯ+೧.

೧೪. ೪ಯ^{೨}+೨ಯ+೧, ೪ಯ^{೨}−೨ಯ+೧.

೧೫. ೯ಪ^{೨}−೩ಪ+೧, ೯ಪ^{೨}+೩ಪ+೧.

೧೬. ೧೬ಪ^{೨}−೧೨ಪ+೯, ೧೬ಪ^{೨}+೧೨ಪ+೯.

೧೭. ೨೫ಪ^{೨}+೫ಪಬ+ಬ^{೨}, ೨೫ಪ^{೨}−೫ಪಬ+ಬ^{೨}.

೧೮. ೪ಯ^{೨}−೧೦ಯಕ್ಷ+೨೫ಕ್ಷ^{೨}, ೪ಯ^{೨}+೧೦ಯಕ್ಷ+೨೫ಕ್ಷ^{೨}.

೧೯. ೫ಯ^{೩}−೨ಯ^{೨}+೪, ೫ಯ^{೩}+೨ಯ^{೨}−೪.

೨೦. ೮ಕ್ಷ^{೩}−೪ಯ+೩, ೮ಕ್ಷ^{೩}+೪ಯ+೩.

೨೧. ೨ಯ^{೩}+೪ಯ^{೨}−೫ಯ+೬, ೨ಯ^{೩}−೪ಯ^{೨}+೫ಯ+೬.

೨೨. ಕ್ಷ^{೩}−೨ಕ್ಷ^{೨}+೬ಕ್ಷ−೭, ಕ್ಷ^{೩}+೨ಕ್ಷ^{೨}−೬ಕ್ಷ+೭.

೨೩. ೩ಕ್ಷ^{೪}−೭ಕ್ಷ^{೨}+೯, ೩ಕ್ಷ^{೪}+೭ಕ್ಷ^{೨}−೯.

೨೪. ೨ಕ+೫ಖ−೭ಗ+೮ಘ, ೨ಕ−೫ಖ+೭ಗ−೮ಘ.

೨೫. ೪ಯ^{೨}+೬ಯ+೯, ೪ಯ^{೨}−೬ಯ+೯, ೧೬ಯ^{೪}−೩೬ಯ^{೨}+೮೧.

೩.

$(ಪ+ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪಮ(ಪ+ಮ);$

$(ಪ-ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩}-ಮ^{೩}-೩ಪಮ(ಪ-ಮ).$

೫·೫. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವದೇ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಇವೇ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. $ಪ+ಬ+ಮ$ ಈ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯುವದಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $ಪ+ಬ$ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$(ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}$$
$$=(ಅ+ಮ)^{೩}$$
$$=ಅ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಅಮ(ಅ+ಮ)$$
$$=(ಪ+ಬ)^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಮ(ಪ+ಬ)(ಪ+ಬ+ಮ) \quad [\because ಅ=ಪ+ಬ]$$
$$=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+ಮ^{೩}+೩(ಪಮ+ಬಮ)(ಪ+ಬ+ಮ)$$
$$=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+೩ಪಮ(ಪ+ಬ+ಮ)+೩ಬಮ(ಪ+ಬ+ಮ)$$
$$=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+೩ಪಮ(ಪ+ಮ)+೩ಪಬಮ+೩ಪಬಮ+೩ಬಮ(ಬ+ಮ)$$
$$=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+೩ಬಮ(ಬ+ಮ)+೩ಪಮ(ಪ+ಮ)+೬ಪಬಮ.$$

ಕಂಸಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಈ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು $ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪ^{೨}ಬ+೩ಪಬ^{೨}+೩ಬ^{೨}ಮ+೩ಬಮ^{೨}+೩ಪ^{೨}ಮ+೩ಪಮ^{೨}+೬ಪಬಮ$ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಇದರಂತೆಯೇ ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆದು ತೋರಿಸಿದೆ.

ಉ. ೧. ೨ಯ + ೩ರ + ಲ ದ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೨ಯ + ೩ರ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

(೨ಯ + ೩ರ + ಲ)^{೩}

= (ಅ + ಲ)^{೩}

= ಅ^{೩} + ಲ^{೩} + ೩ಅಲ (ಅ + ಲ)

= (೨ಯ+೩ರ)^{೩}+ಲ^{೩}+೩ಲ(೨ಯ+೩ರ)(೨ಯ+೩ರ+ಲ)[∴ ಅ=೨ಯ+೩ರ]

= ೮ಯ^{೩} + ೨೭ರ^{೩} + ೧೮ಯರ (೨ಯ + ೩ರ) + ಲ^{೩}

+ ೬ಯಲ (೨ಯ + ೩ರ + ಲ) + ೯ರಲ (೨ಯ + ೩ರ + ಲ)

= ೮ಯ^{೩} + ೨೭ರ^{೩} + ಲ^{೩} + ೧೮ಯರ (೨ಯ+೩ರ) +೬ಯಲ (೨ಯ+ಲ)

+ ೧೮ಯರಲ + ೧೮ಯರಲ + ೯ರಲ (೩ರ + ಲ)

= ೮ಯ^{೩} + ೨೭ರ^{೩} + ಲ^{೩} + ೧೮ಯರ (೨ಯ + ೩ರ) + ೬ಯಲ (೨ಯ + ಲ)

+ ೯ರಲ (೩ರ + ಲ) + ೩೬ಯರಲ.

ಕಂಸಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ನಮಗೆ ಇದೇ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ೮ಯ^{೩} + ೨೭ ರ^{೩} + ಲ^{೩} + ೩೬ ಯ^{೨}ರ + ೫೪ ಯರ^{೨} + ೧೨ ಯ^{೨}ಲ + ೬ ಯಲ^{೨} + ೨೭ ರ^{೨}ಲ + ೯ ರಲ^{೨} + ೩೬ ಯರಲ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

(ಪ + ಬ + ಮ)^{೩} = ಪ^{೩} + ಬ^{೩} + ಮ^{೩} + ೩ಪಬ (ಪ + ಬ) + ೩ಬಮ (ಬ + ಮ) + ೩ ಪಮ (ಪ + ಮ) + ೬ ಪಬಮ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನ ಇಲ್ಲವೆ ಅದರಂತೆಯೇ ಇರುವ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು. ಪ = ೨ಯ, ಬ = ೩ರ, ಮತ್ತು ಮ = ಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

(೨ಯ+೩ರ+ಲ)^{೩}=(೨ಯ)^{೩}+(೩ರ)^{೩}+(ಲ)^{೩} + ೩ . ೨ಯ . ೩ರ (೨ಯ+೩ರ)

+ ೩ . ೩ರಲ (೩ರ+ಲ)+೩ . ೨ಯ.ಲ (೨ಯ+ಲ)+೬ . ೨ಯ . ೩ರಲ

= ೮ಯ^{೩} + ೨೭ರ^{೩} + ಲ^{೩} + ೧೮ಯರ (೨ಯ + ೩ರ) + ೯ರಲ (೩ರ+ಲ)

+ ೬ಯಲ(೨ಯ+ಲ) + ೩೬ಯರಲ.

ಉ. ೨. ೩ಕ − ೪ಗ + ೨ಘ ಇದರ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೩ಕ − ೪ಗ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

(೩ಕ − ೪ಗ + ೨ಘ)^{೩} = (ಅ + ೨ಘ)^{೩}

$= ಅ^{೩} + ೮ಘ^{೩} + ೬ಅಘ\,(ಅ + ೨ಘ)$

$= (೩ಕ - ೪ಗ)^{೩} + ೮ಘ^{೩} + ೬ಘ(೩ಕ - ೪ಗ)(೩ಕ - ೪ಗ + ೨ಘ)\ [\because ಅ = ೩ಕ - ೪ಗ]$

$= ೨೭ಕ^{೩} - ೬೪ಗ^{೩} - ೩೬ಕಗ\,(೩ಕ - ೪ಗ) + ೮ಘ^{೩} + ೧೮ಕಘ(೩ಕ - ೪ಗ + ೨ಘ)$
$\quad - ೨೪ಗಘ(೩ಕ - ೪ಗ + ೨ಘ)$

$= ೨೭ಕ^{೩} - ೬೪ಗ^{೩} + ೮ಘ^{೩} - ೩೬ಕಗ\,(೩ಕ - ೪ಗ) + ೧೮ಕಘ(೩ಕ + ೨ಘ)$
$\quad - ೭೨ಕಗಘ - ೨೪ಗಘ(-೪ಗ + ೨ಘ) - ೭೨ಕಗಘ$

$= ೨೭ಕ^{೩} - ೬೪ಗ^{೩} + ೮ಘ^{೩} - ೩೬ಕಗ\,(೩ಕ - ೪ಗ) + ೧೮ಕಘ(೩ಕ + ೨ಘ)$
$\quad + ೨೪ಗಘ(೪ಗ - ೨ಘ) - ೧೪೪ಕಗಘ.$

$ಪ = ೩ಕ$, $ಬ = -೪ಗ$, ಮತ್ತು $ಮ = ೨ಘ$ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಮುಂದಿನಂತೆ $(ಪ + ಬ + ಮ)^{೩} = ಪ^{೩} + ಬ^{೩} + ಮ^{೩} + ೩ಪಬ\,(ಪ + ಬ) + ೩ಬಮ(ಬ + ಮ) + ೩ಪಮ(ಪ + ಮ) + ೬ಪಬಮ$ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನಾದರೂ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸ-ಬಹುದು.

$(೩ಕ - ೪ಗ + ೨ಘ)^{೩}$

$= (೩ಕ)^{೩} + (-೪ಗ)^{೩} + (೨ಘ)^{೩} + ೩(೩ಕ)(-೪ಗ)(೩ಕ - ೪ಗ)$
$\quad + ೩(-೪ಗ)(೨ಘ)(-೪ಗ + ೨ಘ) + ೩(೩ಕ)(೨ಘ)(೩ಕ + ೨ಘ)$
$\quad + ೬(೩ಕ)(-೪ಗ)(೨ಘ)$

$= ೨೭ಕ^{೩} - ೬೪ಗ^{೩} + ೮ಘ^{೩} - ೩೬ಕಗ\,(೩ಕ - ೪ಗ) - ೨೪ಗಘ(-೪ಗ + ೨ಘ)$
$\quad + ೧೮ಕಘ\,(೩ಕ + ೨ಘ) - ೧೪೪ಕಗಘ$

$= ೨೭ಕ^{೩} - ೬೪ಗ^{೩} + ೮ಘ^{೩} - ೩೬ಕಗ\,(೩ಕ - ೪ಗ) + ೨೪ಗಘ\,(೪ಗ - ೨ಘ)$
$\quad + ೧೮ಕಘ\,(೩ಕ + ೨ಘ) - ೧೪೪ಕಗಘ.$

ಉ. ೩. $೪ಯ - ೩ರ - ೫ಲ$ ಇದರ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಮೇಲೆ **ಉ. ೧** ಮತ್ತು ೨ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಈ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಹಿಡಿದು ಮೂಲ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮೊದಲು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಿ ತರುವಾಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದೆ. ಮೂರು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯುವ ರೂಢಿಯು ಸಾಕಷ್ಟು ಆದ ತರುವಾಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿವರ್ಣದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯೆನಿಸಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಒಮ್ಮೆಲೆ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲು ಬರುವದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

(೪ಯ−೩ರ−೫ಲ)^{೩}= { (೪ಯ−೩ರ)−೫ಲ }^{೩}

=(೪ಯ−೩ರ)^{೩}−೧೨೫ಲ^{೩}−೩(೪ಯ−೩ರ)×೫ಲ { (೪ಯ−೩ರ)−೫ಲ }

=೬೪ಯ^{೩}−೨೭ರ^{೩}−೩೬ಯರ (೪ಯ−೩ರ)−೧೨೫ಲ^{೩}

−೧೫ಲ(೪ಯ−೩ರ)(೪ಯ−೩ರ−೫ಲ)

=೬೪ಯ^{೩}−೨೭ರ^{೩}−೧೨೫ಲ^{೩}−೩೬ಯರ(೪ಯ−೩ರ)

−೬೦ಯಲ(೪ಯ−೩ರ−೫ಲ)+೪೫ರಲ(೪ಯ−೩ರ−೫ಲ)

=೬೪ಯ^{೩}−೨೭ರ^{೩}−೧೨೫ಲ^{೩}−೩೬ಯರ(೪ಯ−೩ರ)

−೬೦ಯಲ(೪ಯ−೫ಲ)+೧೮೦ಯರಲ+೪೫ರಲ(−೩ರ−೫ಲ)+೧೮೦ಯರಲ

=೬೪ಯ^{೩}−೨೭ರ^{೩}−೧೨೫ಲ^{೩}−೩೬ಯರ(೪ಯ−೩ರ)

−೬೦ಯಲ(೪ಯ−೫ಲ)−೪೫ರಲ(೩ರ+೫ಲ)+೩೬೦ಯರಲ.

ಪ=೪ಯ, ಬ= −೩ರ, ಮತ್ತು ಮ= −೫ಲ ಹಿಡಿದರೆ (ಪ+ಬ+ಮ)^{೩}=ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+ಮ^{೩}+೩ಪಬ(ಪ+ಬ)+೩ಬಮ(ಬ+ಮ)+೩ಪಮ(ಪ+ಮ)+೬ಪಬಮ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಹ ಮುಂದಿನಂತೆ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

[illegible]

=(೪ಯ)^{೩}+(−೩ರ)^{೩}+(−೫ಲ)^{೩}+೩(೪ಯ)(−೩ರ)(೪ಯ−೩ರ)+೩(−೩ರ)(−೫ಲ)(−೩ರ−೫ಲ)+೩(೪ಯ)(−೫ಲ)(೪ಯ−೫ಲ)+೬(೪ಯ)(−೩ರ)(−೫ಲ)

=೬೪ಯ^{೩}−೨೭ರ^{೩}−೧೨೫ಲ^{೩}−೩೬ಯರ(೪ಯ−೩ರ)−೪೫ರಲ(೩ರ+೫ಲ)

−೬೦ಯಲ(೪ಯ−೫ಲ)+೩೬೦ಯರಲ.

ಉ. ೪. ಕ−೩ಗ+೪ಫ−೫ ಈ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(ಕ−೩ಗ+೪ಫ−೫)^{೩}= { (ಕ−೩ಗ)+(೪ಫ−೫) }^{೩}

=(ಕ−೩ಗ)^{೩}+(೪ಫ−೫)^{೩}+೩(ಕ−೩ಗ)(೪ಫ−೫)(ಕ−೩ಗ+೪ಫ−೫)

=ಕ^{೩}−೨೭ಗ^{೩}−೯ಕಗ(ಕ−೩ಗ)+೬೪ಫ^{೩}−೧೨೫−೬೦ಫ(೪ಫ−೫)

+೩(೪ಕಫ−೧೨ಗಫ−೫ಕ+೧೫ಗ)(ಕ−೩ಗ+೪ಫ−೫)

=ಕ^{೩}−೨೭ಗ^{೩}+೬೪ಫ^{೩}−೧೨೫−೯ಕಗ(ಕ−೩ಗ)+೧೨ಕಫ(ಕ+೪ಫ)

+೧೨ಕಫ(−೩ಗ−೫)−೧೫ಕ(ಕ−೫)−೧೫ಕ(−೩ಗ+೪ಫ)

−೩೬ಗಫ(−೩ಗ+೪ಫ)−೩೬ಗಫ(ಕ−೫)+೪೫ಗ(−೩ಗ−೫)+೪೫ಗ(ಕ+೪ಫ)

−೬೦ಫ(೪ಫ−೫)

= ಕ^3 − ೨೭ಗ^3 + ೬೪ಘ^3 − ೯ಕಗ(ಕ − ೩ಗ)+೧೨ಕಘ(ಕ+೪ಘ)
+೩೬ಗಘ(೩ಗ − ೪ಘ)− ೧೫ಕ(ಕ − ೫)− ೪೫ಗ(೩ಗ+೫)−೬೦ಘ(೪ಘ − ೫)
−೭೨ಕಗಘ+೯೦ಕಗ−೧೨೦ಕಘ+೩೬೦ಗಘ−೧೨೫

= ಕ^3 − ೨೭ಗ^3 + ೬೪ಘ^3 − ೯ಕಗ(ಕ−೩ಗ)+೧೨ಕಘ(ಕ+೪ಘ)
+೩೬ಗಘ(೩ಗ − ೪ಘ) − ೭೨ಕಗಘ−೧೫ಕ^2−೧೩೫ಗ^2−೨೪೦ಘ^2+೯೦ಕಗ
−೧೨೦ಕಘ+೩೬೦ಗಘ+೭೫ಕ−೨೨೫ಗ+೩೦೦ಘ−೧೨೫.

ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಈ ವಿಸ್ತಾರವು ಸರಿ ಇರುವದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಲು ಬರುವದು. ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಉತ್ಸಾಹ ಇರುವವರು ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಬೇಕು. ಗುಣಾಕಾರದ ಸ್ವಲ್ಪ ಉಜಳಣಿಯಾದರೂ ಆಗುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೭.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

೧. ಕ−ಗ+ಘ. ೨. ತ−ದ−ನ. ೩. ೨ಕ+೩ಗ−ಘ.
೪. ೫ಕ−೩ಗ−೨ಘ. ೫. ೨ತ−೫ದ+೩ನ. ೬. ೪ಪ−ಬ−೩ಮ.
೭. ಪ−ಬ−೯ಮ. ೮. ೨ಪ−ಬ+೬ಮ. ೯. ೩ಕ−೭ಗ+೫.
೧೦. ೧−೫ಪ+೬ಬ. ೧೧. ಪ^2−ಪ+೧. ೧೨. ೨ಪ^2−೪ಪ−೩.
೧೩. ೨+೫ಪ−ಪ^2. ೧೪. ೩−೨ಪ−೪ಪ^2. ೧೫. ಪ^2+ಪಬ−ಬ^2.
೧೬. ೩ಪ^2−೨ಪಬ+ಬ^2. ೧೭. ೪ತ^2−೨ತದ−೩ದ^2. ೧೮. ಪ^3+೩ಪ+೧.
೧೯. ೨ಪ^3−೪ಪ^2−೩. ೨೦. ೪ಕ^4−೨ಕ^2+೩. ೨೧. ೨ಕ^4−೩ಕ^2−೧.
೨೨. ೫−೨ಪ^2+೩ಪ^4. ೨೩. ೨ಪ^4+ಪ^{2}ಬ^2+೪ಬ^4.
೨೪. ಯ^4−೨ಯ^{2}ಕ್ಷ^2+೨ಕ್ಷ^4.

ಆರನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ

೬·೧. ಯಾವದೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ **ಅವಯವಗಳೆಂದೆ**ನ್ನುತ್ತಾರೆ, ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆ-ನಾಗಿ, ೬ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨ ಮತ್ತು ೩ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದೆ. ಅಂದರೆಯೇ ೨ ಮತ್ತು ೩ ಇವು ೬ ರ **ಅವಯವ**ಗಳಿವೆ. ೩೦ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨, ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರ**ವಿದೆ, ಅಂದರೆಯೇ ೨, ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವು ೩೦ ರ **ಅವಯವ**ಗಳಿವೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಕಗ ದ ಅವಯವಗಳು ಕ ಮತ್ತು ಗ, ಕಗಘ ದವು ಕ, ಗ ಮತ್ತು ಘ, ೩೫ ಕಗಘ ದವು ೫, ೭, ಕ, ಗ, ಮತ್ತು ಘ.

ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಯವವು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಅವಯವವು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ ಎರಡನೇ ಅವಯವವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

ಅವಯವ ಈ ಶಬ್ದದಂತೆಯೇ ಅದೇ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ **ಗುಣ, ಗುಣಕ** ಈ ಶಬ್ದಗಳನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. **ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು, ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು,** ಇಲ್ಲವೆ **ಗುಣ-ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು,** ಇವೆಲ್ಲವುಗಳ ಅರ್ಥವು ಒಂದೇ.

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರು-ವಂಥ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳುಳ್ಳ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವದೆಂಬುದರ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದೆ. 'ಗುಣಪೃಥಕ್ಕ-ರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವಂಥ ರಾಶಿಗಳ' ಎಂದೆನ್ನುವ ಉದ್ದೇಶ-ವೇನೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವ-ದೆಂದಲ್ಲ, ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ರೀತಿಯು ಇರುವಂತೆ, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವದೇ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ-ವನ್ನು ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವಂತೆ, ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ-

ವನ್ನು ಮಾಡುವ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ರೀತಿಯು ಇಲ್ಲ. ಇದಲ್ಲದೇ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು ಎಂತಲೂ ಇಲ್ಲ.

೧.

ಅಯ + ಅಕ್ಷ

೬·೨. ನಾವು ಮೊದಲು **ಅಯ + ಅಕ್ಷ** ಈ ಮಾದರಿಯ ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಅಯ ಅಂದರೆ ಅ ಗುಣಿಲೆ ಯ, ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಅಂದರೆ ಅ ಗುಣಿಲೆ ಕ್ಷ. ಸ್ಪಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಹೇಳುವದೆಂದರೆ, ಅ ಮತ್ತು ಯ ಇವು ಅಯ ದ **ಗುಣಕಗಳಿವೆ,** ಮತ್ತು ಅ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವು ಅಕ್ಷ ದ **ಗುಣಕಗಳಿ**ರುವವು. ಅಂದರೆ ಅ ಈ **ಗುಣಕ**ವು ಅಯ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಈ ಎರಡೂ **ಪದ**ಗಳಲ್ಲಿ **ಸಾಧಾರಣ** ಇರುವದು. ಈಗ ಅ ದಿಂದ ಯ ಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ **ಗುಣಾಕಾರ** ಮತ್ತು ಅ ದಿಂದ ಕ್ಷಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ **ಗುಣಾಕಾರ,** ಇವುಗಳ **ಬೇರೀಜನ್ನು** ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಅ ದಿಂದ ಯ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳ **ಬೇರೀಜಿಗೆ** (ಯ + ಕ್ಷ ಕ್ಕೆ) ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೩.೫ + ೩.೭ = ೧೫ + ೨೧ = ೩೬;   ೩ (೫ + ೭) = ೩.೧೨ = ೩೬.

∴ ೩.೫ + ೩.೭ = ೩ (೫ + ೭).

ಒಂದು ವರ್ಗದ ತಿಂಗಳ ಫೀಯು ಮೂರು ರೂಪಾಯಿ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಮೊದಲನೆಯ ದಿನ ಐದು ಹುಡುಗರು ಫೀಯನ್ನು ತಂದು ಕೊಟ್ಟರು. ಅದು ೩ × ೫ ಅಂದರೆ ೧೫ ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವದು. ಎರಡನೆಯ ದಿನ ಮತ್ತೆ ಏಳು ಹುಡುಗರು ತಂದುಕೊಟ್ಟರು. ಅದು ೩ × ೭ ಅಂದರೆ ೨೧ ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವದು. ಒಟ್ಟು ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ೩೬ ರೂಪಾಯಿ ಫೀ ಜಮೆ ಆಯಿತು. ೫ + ೭ ಅಂದರೆ ೧೨ ಹುಡುಗರೂ ಫೀಯನ್ನು ಒಂದೇ ದಿನ ತಂದುಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದು ೩ (೫ + ೭) ಅಂದರೆ ೩ × ೧೨ ಅಂದರೆ ೩೬ ರೂಪಾಯಿಗಳೇ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಇದರಂತೆಯೆ, **ಅಯ + ಅಕ್ಷ = ಅ (ಯ + ಕ್ಷ).**

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಗುಣಕವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಪದಗಳುಳ್ಳ ಯಾವ-ದೊಂದು ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ

ಗುಣಕವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ಮುಂದೆ ಕಂಸಿನೊಳಗೆ ಆ ಪದಗಳ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಚಿಹ್ನ ಸಹಿತವಾಗಿ ಬರೆದರಾಯಿತು. ಈ ಉಳಿದ ಅವಯವಗಳು ನಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವವು. ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬರದಿದ್ದರೆ. ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವವು. ಯಾವದೇ ರಾಶಿಗೆ ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಅವಯವದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇ ಅವಯವವು ಸಿಗು-ವದು. ಭಾಗಲಬ್ಧವೇ ಆ ಎರಡನೇ ಅವಯವವು. ಮೇಲಿನ ಸಂಗತಿಯು ನಮಗೆ ಮುಂದಿನಂತೆಯೂ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅ ವಾರು ಅಗಲವಿರುವ ಮತ್ತು ಯ ವಾರು ಹಾಗು ಕ್ಷ ವಾರು ಉದ್ದಳತೆಯುಳ್ಳ ಎರಡು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಭೂಭಾಗಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹತ್ತಿಕೊಂಡು ಇದ್ದು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಮೊದಲನೆಯದು ರಾಮರಾಯರದಿದ್ದು ಎರಡನೆ-ಯದು ಕೃಷ್ಣರಾಯರದಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅಯ ಚೌ. ವಾ. ಇದ್ದು ಎರಡನೆಯದರದು ಅಕ್ಷ ಚೌ. ವಾ. ಇದೆ. ಕೆಲಕಾಲದ ತರುವಾಯ ರಾಮರಾಯರು ಕೃಷ್ಣರಾಯರಿಂದ ಅವರ ಭೂಭಾಗವನ್ನು ಕೊಂಡರು, ಮತ್ತು ನಡುವಿನ ಬೇಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದೇ ಭಾಗವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳ-ತೆಯು (ಯ + ಕ್ಷ) ವಾರು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯ ಅ ವಾರು ಇದ್ದು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅ(ಯ+ಕ್ಷ) ಚೌ. ವಾರು ಇರುವದು. ಅಂದರೆಯೇ,

ಅಯ + ಅಕ್ಷ = ಅ (ಯ + ಕ್ಷ).

ಇದಲ್ಲದೇ ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡುವಾ. ಬಲಬದಿಯ ರಾಶಿಯು ಅ (ಯ+ಕ್ಷ) ಇರುವದು. ಅದರ ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ನಾವು ಅದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದರೆ ಆ ವಿಸ್ತಾರವು ಅಯ+ ಅಕ್ಷ ಇದೇ ಇರುವದು.

೬·೩. **ದ್ವಿಪದ ರಾಶಿಯು** ಮಾತ್ರೇ **ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯುದು** ಇಲ್ಲವೆ **ಬಹುಪದ ರಾಶಿಯುದು.** ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನಾವು ಅಯ + ಅರ + ಅಕ್ಷ ಈ **ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯನ್ನು** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂರೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ಅ ಇದು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ.** ಈಗ ಅ ದಿಂದ ಯ ಕ್ಕೆ, ರ ಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ **ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು** ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಅ ದಿಂದ ಯ, ರ

ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳ **ಬೇರೀಜಿಗೆ** (ಯ+ರ+ಕ್ಷಕ್ಕೆ) ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ **ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು** ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನು ೩ ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಐದು ಹುಡುಗರು ಕೊಟ್ಟ ಫೀ, ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗರು ಕೊಟ್ಟ ಫೀ ಮತ್ತು ಏಳು ಹುಡುಗರು ಕೊಟ್ಟ ಫೀ, ಈ ಎಲ್ಲ ರಕಮುಗಳ ಬೇರೀಜು ಐದು+ನಾಲ್ಕು+ಏಳು ಅಂದರೆ ಹದಿನಾರು ಹುಡುಗರು ಕೊಟ್ಟ ಫೀಯಷ್ಟು ಇರುವದು.

೩.೫+೩.೪+೩.೭=೧೫+೧೨+೨೧=೪೮; ೩(೫+೪+೭)=೩.೧೬=೪೮.

∴ ೩.೫+೩.೪+೩.೭=೩(೫+೪+೭).

ಇದರಂತೆಯೇ, **ಅಯ+ಅರ+ಅಕ್ಷ=ಅ(ಯ+ರ+ಕ್ಷ).**

ಮೇಲಿನಂತೆ ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡುವಾ. ಬಲಬದಿಯ ರಾಶಿಯು ಅ(ಯ+ರ+ಕ್ಷ) ಇದೆ. ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆದರೆ ಅದು ಅಯ+ಅರ+ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಇರುವದು.

೬.೪. ಈಗ ನಾವು ಅಯ+ಅರ+ಅಲ+ಅವ+ಅಕ್ಷದಂಥ ಒಂದು **ಬಹುಪದ ರಾಶಿಯನ್ನು** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಈ ರಾಶಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಇದು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ.** ಅ ದಿಂದ ಯ, ರ, ಲ, ವ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳಿಗೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ **ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು** ಮತ್ತು ಅ ದಿಂದ ಯ, ರ, ಲ, ವ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ಇವುಗಳ **ಬೇರೀಜಿಗೆ** ಅಂದರೆ (ಯ+ರ+ಲ+ವ+ಕ್ಷಕ್ಕೆ) ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ **ಗುಣಾಕಾರ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ತರದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಇಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೩.೫+೩.೪+೩.೮+೩.೬+೩.೭=೧೫+೧೨+೨೪+೧೮+೨೧=೯೦;

೩(೫+೪+೮+೬+೭)=೩.೩೦=೯೦.

∴ ೩.೫+೩.೪+೩.೮+೩.೬+೩.೭=೩(೫+೪+೮+೬+೭).

ಆದ್ದರಿಂದಲೇ **ಅಯ+ಅರ+ಅಲ+ಅವ+ಅಕ್ಷ=ಅ(ಯ+ರ+ಲ+ವ+ಕ್ಷ).**

ನಾವು ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಹ ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅ ವಾರು ಅಗಲಿರುವ ಮತ್ತು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ ವಾರು, ರ ವಾರು, ಲ ವಾರು, ವ ವಾರು ಮತ್ತು ಕ್ಷ ವಾರು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಐದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಭೂಭಾಗಗಳು

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಐದು ಜನರ ಒಡೆತನದಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಯ ಚೌ. ವಾ. ಅರ ಚೌ. ವಾ., ಅಲ ಚೌ. ವಾ., ಅವ ಚೌ. ವಾ. ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಚೌ. ವಾ. ಇರುವವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಈ ಐದು ಜನರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನು ಉಳಿದ ನಾಲ್ವರ ಕಡೆಯಿಂದ ಅವರ ಭೂಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡರೆ ಮತ್ತು ಅವರ ಒಡೆತನವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ನಡುವಿನ ಬೇಲಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಐದೂ ಭೂಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ತಾಗಿರುವ ಒಂದೇ ಹೊಲವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಅ ವಾರು ಅಗಲವಿದ್ದು (ಯ+ರ+ಲ+ವ+ಕ್ಷ) ವಾರು ಉದ್ದವಿರುವದು. ಮತ್ತು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅ (ಯ+ರ+ಲ+ವ+ಕ್ಷ) ಚೌ. ವಾ. ಇರುವದು. ಈಗ ಈ ಒಂದೇ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಯ ಚೌ. ವಾ., ಅರ ಚೌ. ವಾ., ಅಲ ಚೌ. ವಾ., ಅವ ಚೌ. ವಾ. ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಚೌ. ವಾ., ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳಿರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಐದು ಭೂಭಾಗಗಳಿಂದೊಡಗೂಡಿದ್ದು ಇರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಅಯ + ಅರ + ಅಲ + ಅವ + ಅಕ್ಷ = ಅ (ಯ + ರ + ಲ + ವ + ಕ್ಷ).

೬.೫. ಈಗ ದಪ – ದಬ ಇಂಥ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಬದಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯ ಪ ವಾರು ಉದ್ದವಿರುವ ಮತ್ತು ದ ವಾರು ಅಗಲವಿರುವ ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ ಸಹಜವಾಗಿ ದಪ ಚೌ. ವಾ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಭೂಭಾಗವು ನಮ್ಮ ಒಡೆತನದಲ್ಲಿರುವದೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಅದರೊಳಗಿಂದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬ ವಾರು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಬೇರೆಮಾಡಿ ಮನೆ ಕಟ್ಟುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಮ್ಮ ಒಬ್ಬ ಮಿತ್ರನಿಗೆ ಕೊಡುವೆವು. ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ದಬ ಚೌ. ವಾ. ಇರುವದು. ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಮೇಲೆ ನಮ್ಮ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಉಳಿಯುವ ಭೂಮಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ದಪ – ದಬ ಚೌ. ವಾ. ಇರುವದು. ಆದರೆ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಈ ಭೂಭಾಗದ

←– – – ಪ ವಾರ – – –→

ದ ವಾರ	ಪ - ಬ ವಾರ	ಬ ವಾರ
	ದ (ಪ - ಬ) ಚೌ. ವಾರ	ದ ಬ ಚೌ. ವಾರ

ಆಕೃತಿ ೧.

ಉದ್ದಳತೆಯು (ಪ – ಬ) ವಾರು ಇದ್ದು ಅಗಲಳತೆಯು ದ ವಾರು ಇರುವದು ಮತ್ತು ಈ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ದ (ಪ – ಬ) ಚೌ. ವಾ. ಇರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ದಪ – ದಬ = ದ (ಪ – ಬ).

ಇದಲ್ಲದೇ ದ (ಪ – ಬ) ಈ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಬರೆದರೆ ಅದು ದಪ – ದಬ ದಷ್ಟು ಆಗುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ದಪ – ದಬ = ದ (ಪ – ಬ).

ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆಯೂ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು. ಒಬ್ಬ ಒಕ್ಕಲಿಗನು ತನ್ನ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ದ ರೂ. ದಿನಗೂಲಿಯಂತೆ ಪ ಜನರನ್ನು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಹಚ್ಚಿರುವನೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ದಿನಾಲು ಸಾಯಂಕಾಲದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವು ಮುಗಿದ ಕೂಡಲೆ ಅವರಿಗೆ ದಪ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುವದು. ಒಂದು ದಿನ ಯಾವದೇ ಕಾರಣದಿಂದ ಬ ಜನರು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬರದಿದ್ದರೆ ಅವರಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವ ದಬ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಆ ದಿವಸ ಕೊಡಬೇಕಾಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಆ ದಿನ ಕೇವಲ (ದಪ – ದಬ) ರೂಪಾಯಿಗಳು ಖರ್ಚಾಗುವವು. ಬೇರೆ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ ಆ ದಿನ ಕೇವಲ (ಪ – ಬ) ಜನರೇ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬಂದುದರಿಂದ ಮತ್ತು ದಿನಗೂಲಿಯ ದರವು ದ ರೂಪಾಯಿ ಇರುವದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ದಿನಗೂಲಿಯು ದ (ಪ – ಬ) ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಅನುಮಾನವು ಹೊರಡುವದು. ದಪ – ದಬ = ದ (ಪ – ಬ).

ಈ ಸಂಗತಿಯ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹ ಮನಗಾಣಿಸಿಕೊಡಲು ಬರುವದು; ಹೇಗೆಂದರೆ,

೫ . ೧೭ – ೫ . ೧೨ = ೮೫ – ೬೦ = ೨೫; **೫ (೧೭ – ೧೨)** = ೫ . ೫ – ೨೫.

೧೨.೧೬ – ೧೨.೯ = ೧೯೨ – ೧೦೮ = ೮೪; **೧೨ (೧೬ – ೯)** = ೧೨ . ೭ = ೮೪.

೬ . ೬. ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ಮುಂದಿನ ನಿಷ್ಕರ್ಷವು ಹೊರಡುವದು. **ಯಾವದೊಂದು ಗುಣಕವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಪದಗಳುಳ್ಳ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯು** (ಆ ರಾಶಿಯು ದ್ವಿಪದವಿರಲಿ, ತ್ರಿಪದ-

ವಿರಲಿ, ಇಲ್ಲವೆ ಬಹುಪದವಿರಲಿ) **ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವ-ದಾದರೆ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ಅದರ ಮುಂದೆ ಕೆಂಸಿನಲ್ಲಿ ಆ ಪದಗಳ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಚಿಹ್ನ ಸಹಿತವಾಗಿ ಬರೆದರಾಯಿತು.**

ಇಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಾದ ಈ ಹೊಸ ಸಂಗತಿಯು ಬೇಗನೇ ಗುಣಿಸುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಸಲ ನಮಗೆ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

೩೬ × ೮೨ + ೩೬ + ೧೧೮ = ೩೬ (೮೨ + ೧೧೮) = ೩೬ × ೨೦೦ = ೭೨೦೦,

೫೮ × ೩೨೮ − ೫೮ × ೧೭೮ = ೫೮ (೩೨೮ − ೧೭೮) = ೫೮ × ೫೦ = ೨೯೦೦,

೪೮ × ೫೨ + ೪೮ × ೧೩೩ + ೪೮ × ೬೫ = ೪೮ (೫೨ + ೧೩೩ + ೬೫)

= ೪೮ × ೨೫೦ = ೧೨೦೦೦,

೬೨×೬೪−೬೨×೪೭+೬೨×೪೩=೬೨ (೬೪−೪೭+೪೩) =೬೨×೬೦=೩೭೨೦.

೬·೭. ಈಗ ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆ-ಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉ. ೧. ೪ಯ+೪ಕ್ಷ=೪ (ಯ+ಕ್ಷ). **ಉ. ೨.** ೫ಯ+೧೫ಕ್ಷ=೫(ಯ+೩ಕ್ಷ).

ಉ. ೩. ೬ಪ−೬ಬ=೬ (ಪ−ಬ). **ಉ. ೪.** ೭ಪ−೩೫ಬ=೭ (ಪ−೫ಬ).

ಉ. ೫. ೮ಯ+೮=೮ (ಯ+೧). **ಉ. ೬.** ೯ಯ−೯=೯ (ಯ−೧).

ಉ. ೭. ೧೨ಕ್ಷ+೪೮=೧೨ (ಕ್ಷ+೪). **ಉ. ೮.** ೧೫ಮ−೯೦=೧೫ (ಮ−೬).

ಉ. ೯. ೨ಮ + ೨ರ + ೨ಲ = ೨ (ಮ + ರ + ಲ).

ಉ. ೧೦. ೪ಯ + ೧೨ಬ + ೧೬ಮ = ೪ (ಯ + ೩ಬ + ೪ಮ).

ಉ. ೧೧. ೩ಯ − ೩ರ + ೩ಲ = ೩ (ಯ − ರ + ಲ).

ಉ. ೧೨. ೩ಯ − ೯ರ − ೧೨ಲ + ೨೧ವ = ೩ (ಯ − ೩ರ − ೪ಲ + ೭ವ).

ಉ. ೧೩. ೧೫ಪ − ೨೫ಫ + ೩೫ಬ − ೪೦ಭ − ೧೦ಮ

= ೫ (೩ಪ − ೫ಫ + ೭ಬ − ೮ಭ − ೨ಮ).

ಉ. ೧೪. ೨ಕಪ−೮ಕಬ+೧೨ಕಭ−೨೦ಕಮ=೨ಕ (ಪ−೪ಬ+೬ಭ−೧೦ಮ).

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆದು

ಮುಂದೆ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದೊಳಗಿನ ಉಳಿದ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೂಲ ಚಿಹ್ನ ಸಹಿತವಾಗಿ ಬರೆದಿದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಎಲ್ಲವುಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆ-ಗಾಗಿ, **ಉ. ೭.** ನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ೧೨ಕ್ಷ+೪೮ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ೨, ೩, ೪, ೬ ಮತ್ತು ೧೨ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ ಮತ್ತು ಆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ೧೨(ಕ್ಷ+೪) ಇದರಂತೆಯೇ ೨(೬ಕ್ಷ+೨೪) ಹೀಗೆ, ಇಲ್ಲವೆ ೩(೪ಕ್ಷ+೧೬) ಹೀಗೆ, ಇಲ್ಲವೆ ೪(೩ಕ್ಷ+೧೨) ಹೀಗೆ, ಇಲ್ಲವೆ ೬(೨ಕ್ಷ+೮) ಹೀಗೂ ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ಕೊನೆಯ ನಾಲ್ಕು ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿಯ ಕಂಸ-ಗಳೊಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೬, ೪, ೩, ೨, ಈ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು ಉಳಿಯುವವು ಮತ್ತು ನಾವು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡುವಾಗ ಹೀಗೆ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹಿಂದೆ ಉಳಿಯಗೊಡಬಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ **ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು** ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ತರುವಾಯ ಕಂಸಿ-ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದ ಉಳಿದ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೂಲ ಚಿಹ್ನ ಸಹಿತವಾಗಿ ಬರೆಯುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ **ಉ. ೧೪** ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕೂ ಪದಗಳೊಳಗೆ ೨ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ, ಕ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ೨ಕ ಇದು ಸಾಧಾ-ರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಮೂರರಲ್ಲಿ ೨ಕ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ತರುವಾಯ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೮.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ: (ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾ-ಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದಲೇ ಬಿಡಿಸಲು ಬರಬಹುದು.)

೧. ೫ಯ+೫ಕ್ಷ. **೨.** ೭ಪ+೭ಮ. **೩.** ೮ಕ+೮ಗ. **೪.** ೧೨ರ+೧೨ಲ. **೫.** ೨ಪ−೨ಬ. **೬.** ೯ಪ−೯ಮ. **೭.** ೧೧ಯ−೧೧ಕ್ಷ. **೮.** ೨ಯ+೪ಕ್ಷ.

೯. ೩ಯ-೬ಪ. ೧೦. ೭ಕ-೧೪ಗ. ೧೧. ೮ಯ+೨೪ಕ್ಷ. ೧೨. ೯ಯ-೩೬ಕ್ಷ.
೧೩. ೪ಪ+೬ಬ. ೧೪. ೮ಬ-೧೪ಮ. ೧೫. ೯ಕ-೧೫ಗ. ೧೬. ೨೦ಯ+೨೮ಕ್ಷ.
೧೭. ೨೫ಪ-೧೫ಮ. ೧೮. ೨೭ಕ+೧೨ಗ. ೧೯. ೪೨ಪ+೨೮ಬ.
೨೦. ೬೪ಯ-೩೬ಕ್ಷ. ೨೧. ೮ಯ-೪. ೨೨. ೨೦ಕ್ಷ+೮. ೨೩. ೧೨+೨೮ಮ.
೨೪. ೩೬-೪೮ನ. ೨೫. ೨ಅಯ+೨ಅಕ್ಷ. ೨೬. ೫ಅಯ-೫ಅರ.
೨೭. ೩ಅಯ+೯ಅಕ್ಷ. ೨೮. ೮ಅಪ-೨ಅಬ. ೨೯. ೫ಕಗಯ+೫ಕಗಕ್ಷ.
೩೦. ೭ಕಗಬ+೧೧ಕಗಮ. ೩೧. ೬ಕಗಯ-೧೫ಕಫಕ್ಷ.
೩೨. ೨೨ಪಬಮ-೫೫ಪಮಯ. ೩೩. ೭ಯ+೭ರ+೭ಲ.
೩೪. ೫ಯ-೫ರ+೫ಕ್ಷ. ೩೫. ೪ಯ+೪ಲ-೪ಕ್ಷ. ೩೬. ೮ಪ-೮ಬ-೮ಮ.
೩೭. ೨ಪ+೪ಬ+೬ಮ. ೩೮. ೬ಕ+೯ಗ+೩ಫ. ೩೯. ೧೫ಯ+೧೦ಲ+೨೫ಕ್ಷ.
೪೦. ೮ತ-೪ದ+೧೨ನ. ೪೧. ೧೪ಪ-೨೧ಬ+೨೮ಮ.
೪೨. ೯ಯ-೧೮ರ-೬ಕ್ಷ. ೪೩. ೩೬ಕ-೨೪ಖ+೧೬ಗ.
೪೪. ೨೧ತ+೧೨ದ-೪೮ನ. ೪೫. ೩ಅಯ+೩ಅರ+೩ಅಲ.
೪೬. ೪ಕಪ-೪ಕಬ+೪ಕಮ. ೪೭. ೬ಗಯ+೬ಗರ-೬ಗಕ್ಷ.
೪೮. ೯ಕನ-೯ಕಪ-೯ಕಮ. ೪೯. ೫ಅಯ+೧೦ಅರ+೨೫ಅಲ.
೫೦. ೧೪ಕಪ-೨೧ಕಬ+೨೮ಕಮ. ೫೧. ೧೨ನಪ-೩೦ನಬ-೧೬ನಮ.
೫೨. ೬ಕಯ+೧೫ಗಯ+೧೨ಬಯ. ೫೩. ೧೬ಕಕ್ಷ-೮ಗಕ್ಷ+೩೨ಪಕ್ಷ.
೫೪. ೬ಕಪಯ-೩೦ಕಪಲ+೨೧ಕಪಕ್ಷ.
೫೫. ೨೮ಕಯಕ್ಷ-೧೪ಗಯಕ್ಷ-೬ಬಯಕ್ಷ.
೫೬. ೧೬ಯ-೮ರ+೧೨ಲ-೩೨ಕ್ಷ.
೫೭. ೨೪ಯ-೪೮ರ-೭೨ಲ+೧೬ವ-೨೦ಕ್ಷ.
೫೮. ೧೫ಕಪ-೨೫ಗಫ-೨೦ಫಬ+೧೦ಖಮ.
೫೯. ೮ಕಯರ-೧೨ಗರಲ-೨೦ಫಲಯ.
೬೦. ೨೦ಕಪಬಮ-೧೫ಗಪಬಯ+೩೦ಫಪಬರ-೨೫ತಪಬಕ್ಷ.
೬೧. ೧೬-೨೦ಯ+೨೪ರ+೩೨ಲ-೮ಕ್ಷ.
೬೨. ೧೪+೩೫ಕಯ-೨೧ಗರ-೨೮ಫವ+೪೯ಪಕ್ಷ.

ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೬೩. ೪೭ × ೫೧೩ + ೧೫೩ × ೫೧೩. **೬೪.** ೨೨೪ × ೯೭ − ೨೨೪ × ೭೬.

೬೫. ೩೧೮ × ೪೨೬ + ೧೮೨ × ೪೨೬. **೬೬.** ೮೯೧ × ೭೨೭ − ೮೯೧ × ೪೨೭.

೬೭. ೬೫೬ × ೮೧೯ + ೬೫೬ × ೧೮೧. **೬೮.** ೩೨೭ × ೮೬೪ − ೧೭೭ × ೮೬೪.

೬೯. ೨೭ × ೪೨೮ + ೪೨ × ೪೨೮ + ೩೧ × ೪೨೮.

೭೦. ೧೧೩ × ೫೧೨ − ೫೭ × ೫೧೨ + ೧೪೪ × ೫೧೨.

೭೧. ೮೨೭ ದ $\frac{೩}{೭}$ + ೫೭೩ ದ $\frac{೩}{೭}$. **೭೨.** ೯೩೯ ದ $\frac{೯}{೧೧}$ − ೭೦೮ ದ $\frac{೯}{೧೧}$.

೭೩. ೧೦೨೪ ದ ೩$\frac{೧}{೨}$% + ೧೦೨೪ ದ ೨$\frac{೩}{೪}$%.

೭೪. ೮೩೬ ದ ೬% + ೫೧೪ ದ ೬%.

೭೫. ೧೨೮ ದ ೫% − ೭೭೮ ದ ೫%.

೭೬. ೫೨೮ ದ ೭$\frac{೧}{೨}$% − ೫೨೮ ದ ೪$\frac{೩}{೮}$%.

೬.೮. ಕೆಳಗೆ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ:

ಉ. ೧. ಕ^{೨} + ಕಯ = ಕ (ಕ + ಯ).

ಉ. ೨. ಅ^{೨}ಕ^{೩} + ಅ^{೩}ಕ^{೨} = ಅ^{೨}ಕ^{೨} (ಕ + ಅ).

ಉ. ೩. ೨ಕ^{೩}ಯ^{೪} + ೮ಕ^{೪}ಯ^{೨} = ೨ಕ^{೩}ಯ^{೨} (ಯ^{೨} + ೪ಕ).

ಉ. ೪. ೨೫ಕ^{೩}ಗ^{೪}ಯ^{೩} − ೧೫ಕಗ^{೨}ಕ್ಷ^{೩} = ೫ಕಗ^{೨} (೫ಕ^{೨}ಗ^{೨}ಯ^{೩} − ೩ಕ್ಷ^{೩}).

ಉ. ೫. ೧೨ಪ^{೩}ಬ^{೪}ಮ^{೨}ಯ^{೨} − ೩೨ಪ^{೪}ಬ^{೩}ಮ^{೪}ಯ + ೧೬ಪ^{೫}ಬ^{೨}ಮಯ^{೪}
= ೪ಪ^{೩}ಬ^{೨}ಮಯ (೩ಬ^{೨}ಮಯ − ೮ಪಬಮ^{೩} + ೪ಪ^{೨}ಯ^{೩}).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೯.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ: (ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವಂಥವಿವೆ).

೧. ಯ^{೨}ಕ್ಷ + ಯಕ್ಷ^{೨}. ೨. ೬ಪ^{೨}ಬ + ೬ಪಬ^{೨}.

೩. ೪ಕ^{೨}ಗ + ೧೨ಕಗ^{೨}. ೪. ೧೬ಪ^{೨}ಮ + ೧೨ಪಮ^{೨}.

೫. ಪ^{೨}ಫ − ಪಫ^{೨}. ೬. ೫ಅ^{೨}ಕ್ಷ − ೫ಅಕ್ಷ^{೨}.

೭. ೩ಪ^{೩}ಫ^{೨} − ೨೧ಪ^{೨}ಫ^{೩}. ೮. ೯ಯ^{೪}ರ^{೩} − ೨೪ಯ^{೨}ರ^{೫}.

೯. ಕ^{೨}ಗಘ + ಕಗ^{೨}ಘ + ಕಗಘ^{೨}. ೧೦. ಯ^{೩}ರಕ್ಷ + ಯರ^{೩}ಕ್ಷ + ಯರಕ್ಷ^{೩}.

೧೧. ಯ^{೨}ರ^{೨}ಕ್ಷ − ಯರ^{೨}ಕ್ಷ^{೨} + ಯರಕ್ಷ^{೨}.

೧೨. ೮ಯ^{೩}ಕ್ಷ − ೨೦ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೨} − ೧೨ಯಕ್ಷ^{೩}.

೧೩. ೨೦ಯ^{೩}ರ^{೨}ಲ^{೨} − ೪೦ಯ^{೨}ರ^{೩}ಲ^{೨} + ೧೫ಯ^{೨}ರ^{೨}ಲ^{೩}.

೧೪. ೩೪ಅಪಬ^{೨} + ೧೨ಅಬಮ^{೨} − ೩೮ಅಮಬ^{೨}.

೬·೯. **ಕ (ಪ + ಮ) + ಗ (ಪ + ಮ)** ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯ-ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ನೋಡಿರಿ. ನಮಗೆ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡ-ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯವನ್ನು ತನ್ನೆಡೆಗೆ ಎಳೆದುಕೊಳ್ಳುವದು? ಕರ + ಗರ ಹೀಗೆ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದರೆ ರ ಇದು ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ಅದರ ಗುಣಪೃಥ-ಕ್ಕರಣವನ್ನು ರ (ಕ + ಗ), ಹೀಗೆಯೇ ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದಿಲ್ಲವೇ? ಕೊಟ್ಟ ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಸಿನೊಳಗಿದ್ದ ಪ + ಮ ಇದು ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ತನ್ನ ಕಡೆಗೆ ಎಳೆದುಕೊಂಡು ತಾನು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದೇನೆಂದು ನಮಗೆ ಹೇಳುವದಿಲ್ಲವೇ? 'ಪ + ಮ' ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು 'ರ' ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಅದೇ ರಾಶಿಯನ್ನು 'ಕರ + ಗರ' ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕಾ-ಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲವೇ? ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಅದನ್ನೇ ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ರ(ಕ + ಗ) ಹೀಗೆಯೇ ನಮಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದಿಲ್ಲವೇ? ಆದರೆ ನಾವು 'ರ' ವನ್ನು 'ಪ + ಮ' ದ ಬದಲಾಗಿ ಬರೆದಿರುವೆವು. ಅಂದಮೇಲೆ ಅದರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ 'ರ' ದ ಬದಲಾಗಿ 'ಪ + ಮ' ಬರೆದೊಡನೆಯೇ (ಪ + ಮ)(ಕ + ಗ) ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಅದರ ರೂಪಾಂತರವಾಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲವೇ?

∴ ಕ (ಪ + ಮ) + ಗ (ಪ + ಮ) ≡ (ಪ + ಮ) (ಕ + ಗ).

ಅದರಂತೆಯೇ, ತ(ಪ + ಫ) + ದ(ಪ + ಫ) + ನ(ಪ + ಫ) ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅತಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವ 'ಪ + ಫ' ಈ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದರೆ,

ತ (ಪ + ಫ) + ದ (ಪ + ಫ) + ನ (ಪ + ಫ) ≡ (ಪ + ಫ)(ತ + ದ + ನ).

ಮತ್ತು ಇದರಂತೆಯೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ,

೨ಯ (೩ಯ − ೭) + ೫ (೩ಯ − ೭) ≡ (೩ಯ − ೭) (೨ಯ + ೫) ಮತ್ತು

೬ಯ^{೨} (ಯ − ೩) + ಯ (ಯ − ೩) − ೨೫ (ಯ − ೩)

≡ (ಯ − ೩)(೬ಯ^{೨} + ಯ − ೨೫).

ಈ ಪ್ರಕಾರದ ರಾಶಿಯತ್ತ ಇಲ್ಲಿ ಬೇಕೆಂತಲೇ ನಿಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯವನ್ನೆಳೆಯುವ ಉದ್ದೇಶ-ವೇನೆಂದರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿಮ್ಮ ಕಣ್ಣೆದುರಿಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ನೀವು ದುರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಕೆಲಸವು ವ್ಯರ್ಥವಾಗಿ ಬೆಳೆಯಬಾರದು. ತಾನು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದೇನೆಂದು ಒದರಿ ಹೇಳುವ ಈ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವ* ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕದ ಕಡೆಗೆ ಹಲವು ಸಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಲಕ್ಷ್ಯವು ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಅವರು ಕಂಸವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ರಾಶಿಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆದು, ತರುವಾಯ ವಿಸ್ತಾರದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವರೆಂದು ಅನು-ಭವಕ್ಕೆ ಬಂದಿದೆ. ಇಂಥ ಪ್ರಕಾರದ ಈ ದೀರ್ಘವಾದ ಮಾರ್ಗಕ್ಕೆ ಹಾಯದೆ ಸರಳವಾದ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾದ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಅವರು ಹೋಗಬೇಕೆಂಬ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಈ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ತೀವ್ರವಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ: (ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಿಮಗೆ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರಬಹುದು).

೧. ಕ (೨ಯ + ೫ರ) + ಘ (೨ಯ + ೫ರ).

೨. ೩ತ (೪ಯ − ೭ರ) + ೨ನ (೪ಯ − ೭ರ).

೩. ೨ಪ (೨ಯ + ೭ವ) − ೩ಮ (೨ಯ + ೭ವ).

೪. ೮ಕ (೩ಪ − ೫ಮ) − ೩ಘ (೩ಪ − ೫ಮ).

೫. ಯ (ಯ − ೪ವ) + ವ (ಯ − ೪ವ).

೬. ೨ಯ (೫ಯ + ೪ರ) − ೭ರ (೫ಯ + ೪ರ).

೭. ೩ಯ (ಯ−೮) − ೧೧ (ಯ − ೮).

೮. ೧೨ (೮ − ೩ರ) + ೫ರ (೮ − ೩ರ).

೯. ದ (೨ಯ − ೫ರ) + ಧ (೨ಯ − ೫ರ) + ನ (೨ಯ − ೫ರ).

೧೦ ೨ದ (೪ಯ + ೭ವ) − ೫ಧ (೪ಯ + ೭ವ) + ೬ನ (೪ಯ + ೭ವ).

---

*ಈ ರೀತಿಯ ಗುಣಕಗಳಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟ (ಮಾತಾಡುವ) ಗುಣಕಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುವದು ಯೋಗ್ಯವಾಗುವದು. ಮತ್ತು ಇನ್ನು ಮೇಲೆ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಇವೇ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗುವದು.

೧೧. ದ (೩ಪ + ೪ಫ – ೭ಮ) + ನ(೩ಪ + ೪ ಫ – ೭ಮ).

೧೨. ೫ದ (೨ಪ – ೪ಫ – ೩ಮ) – ೭ನ (೨ಪ – ೪ಫ – ೩ಮ).

೧೩. ತ (ಯ + ರ – ವ) – ದ (ಯ + ರ – ವ) + ನ (ಯ + ರ – ವ).

೧೪. ೫ತ (೨ಯ – ೪ರ – ೭ಲ) + ೭ದ (೨ಯ – ೪ರ – ೭ಲ)
– ೯ನ (೨ಯ – ೪ರ – ೭ಲ).

೧೫. ೬ಯ^೨ (ಯ – ೫) – ೯ಯರ (ಯ – ೫) – ೪ರ^೨ (ಯ – ೫).

೧೬. ೩ಯ^೨ (೨ಯ – ೭) + ೭ಯರ (೨ಯ – ೭) – ೯ರ^೨ (೨ಯ – ೭).

೨.

ಪಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಯ + ಮಕ್ಷ

೬·೧೦. ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳಿದ್ದ **ಪಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಯ + ಮಕ್ಷ** ದಂಥ ರಾಶಿಗಳ ಕಡೆಗೆ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಟ್ಟರೆ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡುಬರುವದು. ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದ ಎರಡೆರಡು ಪದಗಳ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳು ಅದರಲ್ಲಿ ಇರುವವು. ಮತ್ತು ಆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಪಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಯ + ಮಕ್ಷ ≡ ಪ (ಯ + ಕ್ಷ) + ಮ (ಯ + ಕ್ಷ)
≡ ಪವ + ಮವ* [ಯ + ಕ್ಷ ವನ್ನು ವ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಲಾಗಿ
≡ ವ (ಪ + ಮ)*
≡ (ಯ + ಕ್ಷ) (ಪ + ಮ) [ವ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪುನಃ ಯ + ಕ್ಷ ಬರೆದು]

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನಂದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳಲ್ಲಿ 'ಪ' ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವಿದ್ದು ಕೊನೆಯ ಎರಡರಲ್ಲಿ 'ಮ' ವು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

*ಈ ಹಂತಗಳು ಕಾಲುಗಾಡಿಯಂತೆ ಇರುವವು. ಕಾಲುಗಾಡಿಯ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೆ ನಡೆಯಲು ಬಂದ ಬಳಿಕ ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವದಿರುವದಿಲ್ಲ. ಅದರಂತೆಯೇ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮುಂದಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಬರುವಷ್ಟು ನಮ್ಮ ಸಿದ್ಧತೆಯಾದ ಬಳಿಕ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಾರದು.

ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೊದಲಿನ ಎರಡರ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡರ ಒಂದು ಗುಂಪು, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ ಆ ಎರಡೂ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವ (ಯ + ಕ್ಷ ಇದು) ಇದ್ದುದಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದಿತು, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆಯಲಾಗಿ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೂಲರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳು ದೊರೆತವು.

ಪ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಮ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು, ಹೀಗೆಯೇ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಯ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಕ್ಷ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಬೇರೊಂದು ಗುಂಪು ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟರಾಶಿಯ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಯೂ ಸಹ ನಮಗೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಆದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

ಪಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಯ + ಮಕ್ಷ ≡ ಪಯ + ಮಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಕ್ಷ
≡ ಯ(ಪ + ಮ) + ಕ್ಷ(ಪ + ಮ)
≡ ಯಬ + ಕ್ಷಬ* [ಪ + ಮ ವನ್ನು ಬ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಲಾಗಿ
≡ ಬ (ಯ + ಕ್ಷ)*
≡ (ಪ+ಮ)(ಯ+ಕ್ಷ) [ಬ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ + ಮ ಬರೆದು

೬.೧೧. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಆಕೃತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಬದಿಯ ೨ ಅ ಈ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ (೧) ಪ ಇಂ. ಉದ್ದ, ಯ ಇಂಚು ಅಗಲ, (೨) ಮ ಇಂ. ಉದ್ದ, ಯ ಇಂ. ಅಗಲ, (೩) ಪ ಇಂ. ಉದ್ದ, ಕ್ಷ ಇಂಚು ಅಗಲವಿರುವ ಮತ್ತು (೪) ಮ ಇಂ. ಉದ್ದ, ಕ್ಷ ಇಂಚು ಅಗಲವಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಕಟ್ಟಿಗೆಯ

ಪ ಇಂ
ಮ ಇಂ
ಪಯ ಚೌ. ಇಂ.
ಮಯ ಚೌ. ಇಂ.
ಯ ಇಂ
ಕ್ಷ ಇಂ
ಪಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ.
ಮಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ.

ಆ. ೨ ಅ

(ಪ+ಮ) ಇಂ

೧ ಪಯ ಚೌ. ಇಂ.	೨ ಮಯ ಚೌ. ಇಂ.
೩ ಪಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ.	೪ ಮಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ.

ಆ. ೨ ಆ

(ಪ+ಮ) (ಯ+ಕ್ಷ) ಚೌ. ಇಂ.

ತುಂಡುಗಳಿರುವವು. ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಯ ಚೌ. ಇಂ., ಮಯ ಚೌ. ಇಂ., ಪಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ., ಮತ್ತು ಮಕ್ಷ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವವು. ಒಂದು ಫಲಕವನ್ನು ಮಾಡುವದರ ಸಲುವಾಗಿ ಈ ನಾಲ್ಕೂ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಆ. ೨ ಆ ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದೆಡೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಆ ಫಲಕದ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಪ + ಮ) ಇಂ. ಆಗುವದು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು (ಯ + ಕ್ಷ) ಇಂ. ಆಗುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ+ಮ) (ಯ+ಕ್ಷ) ಚೌ. ಇಂ. ಆಗುವದು. ಈಗ ಫಲಕವನ್ನು ಮಾಡಲು ಒಂದೆಡೆ ಕೂಡಿಸಲಾದ ಆ ನಾಲ್ಕೂ ತುಂಡುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟೇ ಈ ಫಲಕದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಾದರೂ ಇರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪಯ + ಮಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಕ್ಷ ≡ (ಪ + ಮ) (ಯ + ಕ್ಷ).

೬·೧೨. **ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದು** ಮತ್ತು **ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು** ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳು **ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವಿರುದ್ಧ** ಅಂದರೆ **ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕ್ರಿಯೆಗಳು** ಇರುತ್ತವೆ. **ಗುಣಾಕಾರ** ಮತ್ತು **ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ** ಒಂದಕ್ಕೊಂದು **ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿವೆ.** ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೩ ಮತ್ತು ೭ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೨೧; ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ೨೧ರ ಅವಯವಗಳು ೩ ಮತ್ತು ೭. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ನಮಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವ ಹಂತಗಳನ್ನೇ **ವಿರುದ್ಧಕ್ರಮದಿಂದ** ನಮಗೆ ಗುಣಾಕಾರರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಲು ಕೆಳಗೆ ಪ + ಮ ಮತ್ತು ಯ + ಕ್ಷ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮತ್ತು ಪಯ + ಪಕ್ಷ + ಮಯ + ಮಕ್ಷ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಹಂತಗಳನ್ನು ಎದುರು ಬದಿರು ಮಂಡಿಸಿದೆ.

(ಪ+ಮ)(ಯ+ಕ್ಷ)	ಪಯ+ಪಕ್ಷ+ಮಯ+ಮಕ್ಷ
≡ ಪ(ಯ+ಕ್ಷ)+ಮ(ಯ+ಕ್ಷ)	≡ ಪ(ಯ+ಕ್ಷ)+ಮ(ಯ+ಕ್ಷ)
≡ ಪಯ+ಪಕ್ಷ+ಮಯ+ಮಕ್ಷ	≡ (ಪ+ಮ)(ಯ+ಕ್ಷ)

೬·೧೩. ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳಿರುವ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮುಂದೆ ಮಾಡುವಾ :

ಉ. ೧. ಅ² + ಅಪ + ಅಮ + ಪಮ ≡ ಅ(ಅ + ಪ) + ಮ(ಅ + ಪ)
≡ (ಅ + ಪ)(ಅ + ಮ).

ಈ ಪ್ರಕಾರದ ರಾಶಿಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಹಳ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವಂಥದಿದೆ. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಪ್ರಥಮ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ವರ್ಣವಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ಣವಿರುವ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು, ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಬೇರೆ ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ ಆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವು ಕಂಡುಬಂದರೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದು ಆ ರಾಶಿಯ ಅವಯುವವಿರುವದು.

ಮೇಲಿನ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅ, ಪ, ಮತ್ತು ಮ, ಈ ಮೂರು ವರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ 'ಪ' ಮತ್ತು 'ಮ' ಈ ಎರಡು ವರ್ಣಗಳು ಕೇವಲ ಪ್ರಥಮ ಘಾತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವವು. ಆದುದರಿಂದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದ ಸಲುವಾಗಿ ರಾಶಿಯ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ (೧) ಪ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು, ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪು, ಇಲ್ಲವೆ (೨) ಮ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಪದಗಳ ಬೇರೆ ಗುಂಪು, ಹೀಗೆ ಪದಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಬೇಕು. ಮೇಲೆ ಎರಡನೆಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಪದಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಂಡಿಸುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು.

ಅ² + ಅಪ + ಅಮ + ಪಮ ≡ ಅ² + ಅಮ + ಅಪ + ಪಮ
≡ ಅ(ಅ + ಮ) + ಪ(ಅ + ಮ)
≡ (ಅ + ಮ)(ಅ + ಪ).

ಉ. ೨. ಯ² − ಕಯ − ಗಯ + ಕಗ ≡ ಯ(ಯ − ಕ) − ಗ(ಯ − ಕ)
≡ (ಯ − ಕ)(ಯ − ಗ).

ಉ. ೩. ರ^{೨} − ತರ + ದರ − ತದ ≡ ರ(ರ − ತ) + ದ(ರ − ತ)
≡ (ರ − ತ)(ರ + ದ).

ಉ. ೪. ೬ಲ^{೨} − ೧೫ಪಲ + ೧೪ಬಲ − ೩೫ಪಬ
≡ ೩ಲ(೨ಲ − ೫ಪ) + ೭ಬ(೨ಲ − ೫ಪ)
≡ (೨ಲ − ೫ಪ)(೩ಲ + ೭ಬ).

ನಾಲ್ಕಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಇದೇ ತರದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಉ. ೫. ಅತ + ಅದ + ಅನ + ಕತ + ಕದ + ಕನ
≡ ಅ(ತ + ದ + ನ) + ಕ(ತ + ದ + ನ)
≡ (ಅ + ಕ)(ತ + ದ + ನ).

(ಇಲ್ಲಿ ಅ ವರ್ಣವಿದ್ದ ಪದಗಳದೊಂದು, ಮತ್ತು ಉಳಿದವುಗಳದ್ದು ಎರಡನೆಯದು. ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದೆ). ಇಲ್ಲವೆ

ಅತ + ಅದ + ಅನ + ಕತ + ಕದ + ಕನ ≡ ಅತ + ಕತ + ಅದ + ಕದ + ಅನ + ಕನ
≡ ತ(ಅ + ಕ) + ದ(ಅ + ಕ) + ನ(ಅ + ಕ)
≡ (ಅ + ಕ)(ತ + ದ + ನ).

ಉ. ೬. ೧೦ಯ^{೨} + ೫ಪಯ − ೪ಬಯ + ೨ಮಯ − ೨ಪಬ + ಪಮ
≡ (೧೦ಯ^{೨} − ೪ಬಯ + ೨ಮಯ) + (೫ಪಯ − ೨ಪಬ + ಪಮ)
≡ ೨ಯ(೫ಯ − ೨ಬ + ಮ) + ಪ(೫ಯ − ೨ಬ + ಮ)
≡ (೨ಯ + ಪ)(೫ಯ − ೨ಬ + ಮ).

(ಇಲ್ಲಿ ಪ ಇಲ್ಲದ ಪದಗಳದೊಂದು ಮತ್ತು ಪ ವರ್ಣವಿದ್ದ ಪದಗಳದ್ದು ಎರಡನೆಯದು, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದೆ). ಇಲ್ಲವೆ

೧೦ಯ^{೨} + ೫ಪಯ − ೪ಬಯ + ೨ಮಯ − ೨ಪಬ + ಪಮ
≡ ೧೦ಯ^{೨} + ೫ಪಯ − ೪ಬಯ − ೨ಪಬ + ೨ಮಯ + ಪಮ
≡ ೫ಯ(೨ಯ + ಪ) − ೨ಬ(೨ಯ + ಪ) + ಮ(೨ಯ + ಪ)
≡ (೨ಯ + ಪ)(೫ಯ − ೨ಬ + ಮ).

ಉ. ೭. ೩ಕತ-೬ಗತ+೯ಫತ+೨ಕದ-೪ಗದ+೬ಫದ-ಕನ
+೨ಗನ-೩ಫನ
≡ ೩ತ(ಕ-೨ಗ+೩ಫ)+೨ದ(ಕ-೨ಗ+೩ಫ)-ನ(ಕ-೨ಗ+೩ಫ)
≡ (ಕ-೨ಗ+೩ಫ) (೩ತ+೨ದ-ನ).

ಉ. ೮. ೨ಯ^{೨}-೨ಕಯ+೪ಗಯ+೩ಪಯ-ಮಯ-೩ಕಪ+೬ಗಪ
+ಕಮ-೨ಗಮ
≡ (೨ಯ^{೨}-೨ಕಯ+೪ಗಯ)+(೩ಪಯ-೩ಕಪ+೬ಗಪ)
-(ಮಯ-ಕಮ+೨ಗಮ)
≡ ೨ಯ(ಯ-ಕ+೨ಗ)+೩ಪ(ಯ-ಕ+೨ಗ)-ಮ(ಯ-ಕ+೨ಗ)
≡ (ಯ-ಕ+೨ಗ) (೨ಯ+೩ಪ-ಮ).

(ಇಲ್ಲಿ ಪ ವರ್ಣವಿದ್ದ ಪದಗಳದೊಂದು, ಮ ವರ್ಣವಿದ್ದ ಪದಗಳದೊಂದು ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಪದಗಳದೊಂದು, ಹೀಗೆ ಮೂಲ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಪದಗಳ **ಮೂರು ಗುಂಪು**ಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಅವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟ (**ಮಾತಾಡುವ**) ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವೆಂದು ಕಂಡುಬಂದದ್ದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ಎರಡನೆಯ ಅವಯವವೆಂದು ಬರೆದಿದೆ).

ಪ-ಮ ಮತ್ತು ಮ-ಪ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೆಟ್ಟಗೆ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರದ ಮೂಲಕ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಆಗುವ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಾರದೆಂದು ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಕಂಸವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ನಿಯಮಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.

ಪ - ಮ = -(ಮ - ಪ) ಮತ್ತು ಮ - ಪ = -(ಪ - ಮ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ:

೧. ಅಯ+ಅರ+ಪಯ+ಪರ. ೨. ೨ಪಯ-೨ಮಯ-ಪಕ್ಷ+ಮಕ್ಷ.
೩. ೨ಕಪ-ಗಪ+೨ಕಮ-ಗಮ. ೪. ೮ತಪ+೬ದಪ-೪ತಮ-೬ದಮ.
೫. ೩೨ಕಯ - ೧೨ಗಯ - ೪೦ಕಕ್ಷ + ೧೫ಗಕ್ಷ.

೬. ೮ಪಯ – ೨೮ಮಯ + ೬ಪರ – ೨೧ಮರ.

೭. ೩ಗಪ – ೧೨ಜಪ – ೪ಗಮ + ೧೬ಜಮ.

೮. ೧೮ದಪ – ೧೫ನಪ + ೧೨ದಮ – ೧೦ನಮ.

೯. ೧೦ಕರ + ೪ಜರ + ೩೫ಕಲ + ೧೪ಜಲ.

೧೦. ೧೫ಅಪ – ೧೦ಜಪ – ೩ಅಮ + ೧೨ಜಮ.

೧೧. ೮ಪಲ – ೨ಬಲ + ೨೦ಪವ – ೫ಬವ.

೧೨. ೧೨ಮಯ – ೯ಮವ + ೮ಯ – ೬ವ.

೧೩. ೧೬ಪಯ – ೬ಮಯ – ೪೦ಪ + ೧೫ಮ.

೧೪. ೨೮ಕರ + ೭ಕಲ – ೮ರ – ೨ಲ. ೧೫. ೬ತವ – ೩ತಕ್ಷ + ೮ವ – ೪ಕ್ಷ.

೧೬. ಕಗ + ೬ಕ + ೫ಗ + ೩೦. ೧೭. ಯರ – ೮ಯ – ೩ರ + ೨೪.

೧೮. ಪಬ – ೭ಪ + ೬ಬ – ೪೨. ೧೯. ಜನ + ೮ಜ – ೧೧ನ – ೮೮.

೨೦. ೬ಪಯ–೨೧ಯ–೮ಪ+೨೮. ೨೧. ೧೬ಯರ–೨೪ಯ+೧೪ರ–೨೧.

೨೨. ಅ^{೨}+೨ಅಕ+೪ಅಗ+೮ಕಗ. ೨೩. ಬಮ+೫ಬಯ–೩ಮಯ–೧೫ಯ^{೨}.

೨೪. ೨ರ^{೨} – ೮ಪರ + ೩ಬರ – ೧೨ಪಬ.

೨೫. ೬ಯ^{೨}–೧೫ಪಯ–೪ಮಯ+೧೦ಪಮ.

೨೬. ೧೬ಯ^{೨} + ೧೦ಪಯ + ೮ಬಯ + ೫ಪಬ.

೨೭. ೧೪ಯ^{೨} – ೪ಕಯ + ೪೬ಗಯ – ೧೪ಕಗ.

೨೮. ಪಯ – ಬಯ – ಮಯ – ಪಕ್ಷ + ಬಕ್ಷ + ಮಕ್ಷ.

೨೯. ಕಯ – ಗಯ + ಘಯ + ಕಕ್ಷ – ಗಕ್ಷ + ಘಕ್ಷ.

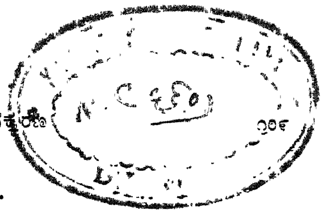
೩೦. ಅಪ – ೨ಅಬ + ೩ಅಮ – ಪಯ + ೨ಬಯ – ೩ಮಯ.

೩೧. ೪ಪಯ + ೧೦ಬಯ – ೨ಮಯ – ೧೦ಪಕ್ಷ – ೨೫ಬಕ್ಷ + ೫ಮಕ್ಷ.

೩೨. ಯ^{೨} – ೨ಅಯ + ೪ಕಯ – ೩ಗಯ – ೮ಅಕ + ೬ಅಗ.

೩೩. ೨ಪಯ+೩ಬಯ–ಮಯ–೪ಪಲ–೬ಬಲ+೨ಮಲ+೨ಪವ+೩ಬವ –ಮವ.

೩೪. ಯ^{೨}–ಕಯ+೨ಘಯ–೪ಪಯ+೩ಮಯ+೪ಕಪ–೮ಘಪ–೩ಕಮ +೬ಘಮ.



೩.

$$ಪ^{೨} \pm ೨ಪಮ + ಮ^{೨} \equiv (ಪ \pm ಮ)^{೨}.$$

೬·೧೪. ಈಗ ನಾವು **$ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}$** ಮತ್ತು **$ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಮ^{೨}$** ಈ ಪ್ರಕಾರದ **ತ್ರಿಪದ** ರಾಶಿಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ. ಮೊದಲನೇಯದು **$ಪ+ಮ$**ದ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು **$ಪ-ಮ$**ದ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ. **ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ** ಬೇರೀಜಿನ **ವರ್ಗವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು** ಅಧಿಕ **ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟಿರುವದು.** ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ **ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ** ವಜಾಬಾಕಿಯ **ವರ್ಗವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು** ಉಣಾ **ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುವದು.** ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಾವು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಹಿಂದೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

$(ಪ+ಮ)^{೨} \equiv (ಪ+ಮ)(ಪ+ಮ)$	$(ಪ-ಮ)^{೨} \equiv (ಪ-ಮ)(ಪ-ಮ)$
$\equiv ಪ(ಪ+ಮ)+ಮ(ಪ+ಮ)$	$\equiv ಪ(ಪ-ಮ)-ಮ(ಪ-ಮ)$
$\equiv ಪ^{೨}+ಪಮ+ಪಮ+ಮ^{೨}$	$\equiv ಪ^{೨}-ಪಮ-ಪಮ+ಮ^{೨}$
$\equiv ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}.$	$\equiv ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಮ^{೨}.$

ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $ಪ+ಮ$ ಮತ್ತು $ಪ+ಮ$, $ಪ-ಮ$ ಮತ್ತು $ಪ-ಮ$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿವೆ, ಮತ್ತು **ಗುಣಕಾರ** ಹಾಗೂ **ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ** ಇವು **ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿರುತವೆಂದು** ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡುವಾಗ (ವರ್ಗವಿಸ್ತಾರ ಮಾಡುವಾಗ) ಕ್ರಮವಾಗಿ ನಮಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವ ಹಂತಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡುವಾಗ ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಇದು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}$
$\equiv ಪ^{೨}+ಪಮ+ಪಮ+ಮ^{೨}$
$\equiv ಪ(ಪ+ಮ)+ಮ(ಪ+ಮ)$
$\equiv (ಪ+ಮ)\,(ಪ+ಮ)$
$\equiv (ಪ+ಮ)^{೨}$

$ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಮ^{೨}$
$\equiv ಪ^{೨}-ಪಮ-ಪಮ+ಮ^{೨}$
$\equiv ಪ(ಪ-ಮ)-ಮ(ಪ-ಮ)$
$\equiv (ಪ-ಮ)\,(ಪ-ಮ)$
$\equiv (ಪ-ಮ)^{೨}$

ಇದರಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನಂತೆ ನಿರ್ಣಯವಾಗುವದು. (೧) **ಯಾವದೊಂದು ತ್ರಿಪದಿಯು ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಧಿಕ ಇವೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ,** ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ **ಅದು** ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ **ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುವದು,** ಮತ್ತು (೨) **ಅದು ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಅವೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ,** ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ **ಅದು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗದಷ್ಟು ಇರುವದು.**

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನದೊಳಗಿನ ಮತಿತಾರ್ಥವು ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಸಮಾವೇಶವಾಗುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಪೂರ್ಣ ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $ಪ^{೨}-೨ಪಮ+ಪ^{೨}=ಪ^{೨}+೨.\ ಪ.\ (-ಮ)+(-ಮ)^{೨}$, ಮತ್ತು $ಪ-ಮ=ಪ+(-ಮ)$.

೬·೧೫. ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಆಕೃತಿಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಮಗೆ ಹೇಗೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುವಾ.

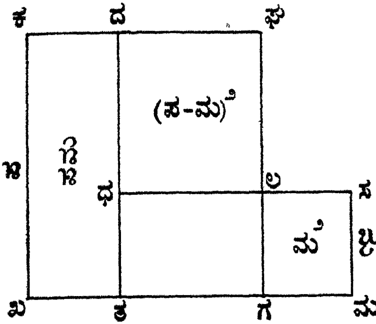
ಮ
$ಪ^{೨}$
ಪಮ
ಪ
ಪಮ
$ಮ^{೨}$
ಮ

ಆ. ೩

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಆ ಆಕೃತಿಯು ಎರಡು ಚೌರಸಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳು ಕೂಡಿ ಆಗಿದೆ. ಚೌರಸಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು $ಪ^{೨}$ ಚೌ. ಇಂ. ಮತ್ತು $ಮ^{೨}$ ಚೌ. ಇಂ. ಇದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಪಮ ಚೌ. ಇಂ. ಇದೆ. ನಾಲ್ಕು ಸಣ್ಣ ಆಕೃತಿಗಳು ಕೂಡಿ ಆದ ಈ ದೊಡ್ಡ ಆಕೃತಿಯು ಚೌರಸವಿದ್ದು.

ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯು (ಪ + ಮ) ಇಂ. ಇದೆಯೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $(ಪ + ಮ)^೨$ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯಾದರೂ ಅಷ್ಟೇ ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು.

$$ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ \equiv (ಪ + ಮ)^೨.$$



ಆ. ೪

ಈ ಆಕೃತಿಯು ಎರಡು ಚೌರಸಗಳಿಂದೊಡಗೂಡಿದೆ. **ಕಖಗಘ** ಇದು ಪ ಇಂ. ಭುಜದ ಚೌರಸವಿದ್ದು **ಲಗಮಸ** ಇದು ಮ ಇಂ. ಭುಜದ ಚೌರಸವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $ಪ^೨$ ಚೌ. ಇಂ. ಮತ್ತು $ಮ^೨$ ಚೌ. ಇಂ. ಇವೆ. ಮತ್ತು ಇಡೀ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು$(ಪ^೨+ಮ^೨)$ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವದು. **ಕಖತದ** ಮತ್ತು **ತಮಸಥ** ಇವೆರಡು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಪ ಇಂ. ಮತ್ತು ಮ ಇಂ. ಇವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು **ಪಮ** ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವದು. ಈ ಎರಡು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಆಕೃತಿಯೊಳಗಿಂದ ತೆಗೆದುಬಿಟ್ಟರೆ **ದಥಲಘ** ಈ ಭಾಗವು ಉಳಿಯುವದು. ಮೂಲ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $(ಪ^೨ + ಮ^೨)$ ಚೌ. ಇಂ. ಮತ್ತು ಈ ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು **ಪಮ** ಚೌ. ಇಂ. ಇದ್ದ ಮೂಲಕ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $(ಪ^೨ - ೨ಪಮ + ಮ^೨)$ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವದು. ಈಗ **ದಥಲಘ** ಈ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಂಡು-ಬರುವದು. ಅದೊಂದು ಚೌರಸವಿದ್ದು ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು

(ಪ – ಮ) ಇಂ. ಇದೆ, ಅಂದರೆಯೇ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $(ಪ - ಮ)^{೨}$ ಚೌ. ಇಂ. ಇದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವದೇನೆಂದರೆ,

$$ಪ^{೨} - ೨ಪಮ + ಮ^{೨} \equiv (ಪ - ಮ)^{೨}.$$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. **ನಮಗೆ ಯಾವದೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು** ಅಧಿಕ ಇಲ್ಲವೆ ಉಣಾ **ಅವೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ, ಹೀಗೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬಂದರೆ ಆ ರಾಶಿಯು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆ ಪದಗಳ** ಬೇರೀಜಿನ ಇಲ್ಲವೆ ಆ **ಪದಗಳೊಳಗಿನ** ಅಂತರದ **ವರ್ಗವಿದೆ** ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

೬·೧೬. ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಗಳು ವರ್ಗಗಳಿವೆಯೋ ಹೇಗೆ, ಮತ್ತು ಇದ್ದರೆ ಅವು ಯಾವ ದ್ವಿಪದಿಗಳ ವರ್ಗಗಳಿವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನಾವು ನೋಡುವಾ.

ಉ. ೧. $ಯ^{೨} - ೧೮ಯ + ೮೧$. ಇಲ್ಲಿ $ಯ^{೨}$ ಇದು ಯದ **ವರ್ಗ**ವಿದ್ದು ೮೧ ಇದು ೯ರ **ವರ್ಗ**ವಿದೆ, ಮತ್ತು ೧೮ಯ ಇದು ೯ ಹಾಗೂ ಯ ಇವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ** ಇದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ಯ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ **ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು** ಉಣಾ ಯ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ** ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಯ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ **ಅಂತರದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ** ಸರಿ ಇದೆ.

$$\therefore \quad ಯ^{೨} - ೧೮ಯ + ೮೧ \equiv (ಯ - ೯)^{೨}.$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ $(ಯ - ೯)^{೨}$ದ ಬದಲು $(೯ - ಯ)^{೨}$ ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. (ಯ – ೯)ರ ವರ್ಗ ಮತ್ತು (೯ – ಯ)ದ ವರ್ಗ ಇವು ಒಂದೇ. ಮತ್ತು ಇದು ಸಹಜವೇ ಇದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $೯ - ಯ = -(ಯ - ೯)$. ಮತ್ತು ಯ – ೯ ಗುಣಿಲೆ ಯ – ೯ ಹಾಗೂ –(ಯ – ೯) ಗುಣಿಲೆ –(ಯ – ೯) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಭೇದವೂ ಇರುವದಿಲ್ಲ. –ಅ ದ ವರ್ಗ $ಅ^{೨}$ ಮತ್ತು ಅ ದ ವರ್ಗವೂ $ಅ^{೨}$ ವೇ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವದೇ **ಧನಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ಎರಡು** ಇರುವವು. ೪ರ ವರ್ಗಮೂಲವು +೨ ಇಲ್ಲವೆ –೨, $ಅ^{೨}$ದ ವರ್ಗಮೂಲವು + ಅ ಇಲ್ಲವೆ – ಅ, $ಪ^{೨} + ೨ಪಮ + ಮ^{೨}$ ದ ವರ್ಗಮೂಲವು ಪ + ಮ ಇಲ್ಲವೆ – ಪ – ಮ ಮತ್ತು $ಪ^{೨} - ೨ಪಮ + ಮ^{೨}$ ದ ವರ್ಗಮೂಲವು ಪ – ಮ ಇಲ್ಲವೆ ಮ – ಪ.

ಉ. ೨. $\text{೨೫ಅ}^{೨} + \text{೭೦ಅ} + \text{೪೯}$. $\text{೨೫ಅ}^{೨}$ ಇದು ೫ಅ ದ **ವರ್ಗ**ವಿದ್ದು ೪೯ ಇದು ೭ ರ **ವರ್ಗ**ವಿದೆ, ಮತ್ತು ೭೦ಅ ಇದು ೫ಅ ಹಾಗೂ ೭ ಇವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ** ಇದೆ.

$$\therefore\ \text{೨೫ಅ}^{೨} + \text{೭೦ಅ} + \text{೪೯} \equiv (\text{೫ಅ} + \text{೭})^{೨}.$$

ಉ. ೩. $\text{೩೬ಪ}^{೨} + \text{೪೯ಪಮ} + \text{೨೫ಮ}^{೨}$. $\text{೩೬ಪ}^{೨}$ ಇದು ೬ಪ ದ ವರ್ಗವಿದೆ, $\text{೨೫ಮ}^{೨}$ ಇದು ೫ಮ ದ ವರ್ಗವಿದೆ; ಆದರೆ ೪೯ಪಮ ಇದು ೬ಪ ಮತ್ತು ೫ಮ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ಅಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ತ್ರಿಪದಿಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವದಿಲ್ಲ. ಎರಡನೆಯ ಪದವು ೪೯ಪಮ ದ ಬದಲಾಗಿ ೬೦ಪಮ (೬ಪ ಮತ್ತು ೫ಮ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ) ಇದ್ದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು $\text{೬ಪ} + \text{೫ಮ}$ ದ ವರ್ಗವಿರಬಹುದಾಗಿತ್ತು.

ಉ. ೪. $\text{೬೪ಯ}^{೨} - \text{೧೭೬ಯಕ್ಷ} + \text{೧೨೧ಕ್ಷ}^{೨}$ ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ:

$$\begin{aligned}\text{೬೪ಯ}^{೨} - \text{೧೭೬ಯಕ್ಷ} + \text{೧೨೧ಕ್ಷ}^{೨} &\equiv (\text{೮ಯ})^{೨} - \text{೨}.\ \text{೮ಯ}.\ \text{೧೧ಕ್ಷ} + (\text{೧೧ಕ್ಷ})^{೨}\\ &\equiv (\text{೮ಯ} - \text{೧೧ಕ್ಷ})^{೨}.\end{aligned}$$

ಉ. ೫. $\text{೪೯ಯ}^{೨} + \text{ಯರ} + \frac{೧}{೧೯೬}\text{ರ}^{೨}$ ದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned}\text{೪೯ಯ}^{೨} + \text{ಯರ} + \frac{೧}{೧೯೬}\text{ರ}^{೨} &\equiv (\text{೭ಯ})^{೨} + \text{೨}.\ \text{೭ಯ}.\ \frac{೧}{೧೪}\text{ರ} + \left(\frac{೧}{೧೪}\text{ರ}\right)^{೨}\\ &\equiv \left(\text{೭ಯ} + \frac{೧}{೧೪}\text{ರ}\right)^{೨}.\end{aligned}$$

ಉ. ೬. $\text{೮ಯ}^{೨} - \text{೫೬ಯರ} + \text{೯೮ರ}^{೨}$ ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned}\text{೮ಯ}^{೨} - \text{೫೬ಯರ} + \text{೯೮ರ}^{೨} &\equiv \text{೨}(\text{೪ಯ}^{೨} - \text{೨೮ಯರ} + \text{೪೯ರ}^{೨})\\ &\equiv \text{೨}(\text{೨ಯ} - \text{೭ರ})^{೨}.\end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೂಲ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ಇರುವ ೨ ಈ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದ ಬಳಿಕ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಪದಸಮುಚ್ಚಯವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿದೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯು ಯಾವುದೆಂದರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ

ಯಾವದೊಂದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಬಂದರೆ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು, ತರುವಾಯ ಉಳಿದವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಬೇಕು.

ಉ. ೭. $೨೭ರ^{೪} - ೯೦ರ^{೨}ಲ^{೨} + ೭೫ಲ^{೪}$ ದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$೨೭ರ^{೪}-೯೦ರ^{೨}ಲ^{೨}+೭೫ಲ^{೪} \equiv ೩(೯ರ^{೪}-೩೦ರ^{೨}ಲ^{೨}+೨೫ಲ^{೪})$$
$$\equiv ೩\{(೩ರ^{೨})^{೨}-೨\cdot ೩ರ^{೨}\cdot ೫ಲ^{೨}+(೫ಲ^{೨})^{೨}\}$$
$$\equiv ೩(೩ರ^{೨}-೫ಲ^{೨})^{೨}.$$

ಉ. ೮. $(೫ಯ+೪ರ)^{೨} - ೨(೫ಯ+೪ರ)(೪ರ-೭ಲ)+(೪ರ-೭ಲ)^{೨}$ ದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

$೫ಯ+೪ರ$ ಮತ್ತು $೪ರ-೭ಲ$ ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ವ** ಮತ್ತು **ಸ** ಈ ವರ್ಣಗಳಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\text{ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು} = ವ^{೨} - ೨ವಸ + ಸ^{೨}$$
$$= (ವ - ಸ)^{೨}$$
$$= \{(೫ಯ + ೪ರ) - (೪ರ - ೭ಲ)\}^{೨}$$
$$= (೫ಯ + ೪ರ - ೪ರ + ೭ಲ)^{೨}$$
$$= (೫ಯ + ೭ಲ)^{೨}.$$

ಉ. ೯. $೪೯ದ^{೨}-೧೬೮ದನ+೧೪೪ನ^{೨}-೨೧ದ+೩೬ನ$ ದ ಅವಯವ-ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಸುಲಭರೀತಿಯಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ಎರಡು ಭಾಗಗಳು ಆಗುವವು. ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಮೂರು ಪದಗಳ ಭಾಗವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿದ್ದು ಅದು ಯಾವುದರ ವರ್ಗ-ವಿರುವದೋ ಅದು ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅವಯವ ರೂಪದಿಂದ ಇದೆ. ಅದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$೪೯ದ^{೨} - ೧೬೮ದನ + ೧೪೪ನ^{೨} - ೨೧ದ + ೩೬ನ$$
$$\equiv (೭ದ - ೧೨ನ)^{೨} - ೩(೭ದ - ೧೨ನ)$$
$$\equiv (೭ದ-೧೨ನ)(೭ದ-೧೨ನ-೩).$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ವರ್ಗಗಳಿವೆಯೋ ಹೇಗೆ, ಮತ್ತು ಇದ್ದರೆ ಅವು ಯಾವವುಗಳ ವರ್ಗಗಳಿವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. (ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದಲೇ ಮಾಡಲು ಬರುವವು.)

೧. ಯ^{೨}−೧೨ಯ+೩೬.
೨. ೪ರ^{೨}+೨೦ರ+೨೫.
೩. ೧೬ಲ^{೨}+೫೬ಲ+೪೯.
೪. ೨೫ಸ^{೨}−೭೦ಸ+೪೯.
೫. ೮೧−೧೮ರ+ರ^{೨}.
೬. ೬೪+೪೮ಕ್ಷ+೯ಕ್ಷ^{೨}.
೭. ೨೫ಪ^{೨}+೨೦ಪಮ+೪ಮ^{೨}.
೮. ೩೬ಯ^{೨}−೮೪ಯಲ+೪೯ಲ^{೨}.
೯. ೧೨೧ಪ^{೨}−೧೯೮ಪರ+೮೧ರ^{೨}.
೧೦. ೩೬ಪ^{೨}+೧೨೦ಪಮ+೧೦೦ಮ^{೨}.
೧೧ ೪೯ಪ^{೨}+೫೬ಪಬ+೧೬ಬ^{೨}.
೧೨. ೧೪೪ಪ^{೨}−೧೨೦ಪಮ+೨೫ಮ^{೨}.
೧೩. ೧೬ಯ^{೨}−೭೨ಯರ+೮೧ರ^{೨}.
೧೪. ೧೦೦ರ^{೨}−೬೦ರಲ+೯ಲ^{೨}.
೧೫. ೧೨೧ಪ^{೨}−೧೧೦ಪಮ+೨೫ಮ^{೨}.
೧೬. ೪೯ಯ^{೨}−೪೨ಯರ+೯ರ^{೨}.
೧೭. ೮೧ಅ^{೨}+೮೦ಅ+೯.
೧೮. ೧೬ಅ^{೨}+೪ಅ+೧.
೧೯. ೩೬+೧೩೨ಮ+೧೨೧ಮ^{೨}.
೨೦. ೮೧ನ^{೨}+೨೮೮ನಕ್ಷ+೨೫೬ಕ್ಷ^{೨}.
೨೧. ೬೨೫ಯ^{೨}−೨೦೦ಯಕ್ಷ+೧೬ಕ್ಷ^{೨}.
೨೨. $\frac{೧}{೬೪}$ − ಅಕ್ಷ + ೧೬ಅ^{೨}ಕ್ಷ^{೨}.
೨೩. ೧೬ಪ^{೪}−೨೪ಪ^{೨}ಮ^{೨}+೯ಮ^{೪}.
೨೪. ೨೫ಅ^{೪}+೩೦ಅ^{೨}ಕ್ಷ^{೨}+೯ಕ^{೪}.
೨೫. ೩೬ಕ^{೨}+೮೪ಕಪ^{೨}+೪೯ಪ^{೪}.
೨೬. ೪ರ^{೪}−೨೦ರ^{೨}ಲ^{೩}+೨೫ಲ^{೬}.
೨೭. ೪೯ಯ^{೮} − ಯ^{೪}ಕ್ಷ^{೩} + $\frac{೧}{೧೯೬}$ಕ್ಷ^{೬}.
೨೮. (೨ಯ−ರ)^{೨}−೨(೨ಯ−ರ)(ಯ−೨ರ)+(ಯ−೨ರ)^{೨}.
೨೯. ೪(೩ಪ−೫ಮ)^{೨}+೧೨(೩ಪ−೫ಮ)(೩ಮ−೫ಪ)+೯(೩ಮ−೫ಪ)^{೨}.
೩೦. ೧೬(ಪ+ಮ)^{೨}+೪೦(ಪ+ಮ)(ಯ+ರ)+೨೫(ಯ+ರ)^{೨}.
೩೧. ೪೯(೩ಯ+೫ರ)^{೨}−೧೧೨(೩ಯ+೫ರ)(೨ರ−ಲ)+೬೪(೨ರ−ಲ)^{೨}.

ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ:

೩೨. ೨೫ಯ^{೨}+೬೦ಯರ+೩೬ರ^{೨}−೫ಯ−೬ರ.
೩೩. ೪ರ^{೨}−೨೦ರಲ+೨೫ಲ^{೨}−೧೪ರ+೩೫ಲ.
೩೪. ೧೬ಪ^{೨} − ೪ಪಮ + $\frac{೧}{೪}$ಮ^{೨} − ೧೬ಪ + ೨ಮ.

೩೫. $\text{ಯ}^{೨} + ೨ + \frac{೧}{\text{ಯ}^{೨}} + ೩\text{ಯ} + \frac{೩}{\text{ಯ}}$.

೩೬. $೯\text{ಕ್ಷ}^{೨} - ೧೬\text{ಕಕ್ಷ} + ೪\text{ಕ}^{೨} - ೨೧\text{ಕ್ಷ} + ೧೪\text{ಕ}$.

೩೭. $೨೫\text{ರ}^{೨} - ೬೦\text{ರಸ} + ೩೬\text{ಸ}^{೨} - ೧೦\text{ಕರ} + ೧೨\text{ಕಸ}$.

೪.

$\text{ಪ}^{೨} - \text{ಮ}^{೨}$

೬·೧೭. ಈಗ ನಾವು $\text{ಪ}^{೨} - \text{ಮ}^{೨}$ ಈ ರೀತಿಯ, ಅಂದರೆ **ಒಂದು ವರ್ಗ** ಉಣಾ **ಎರಡನೆಯ ವರ್ಗ,** ಇಂಥ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದಂತೆ **ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು** $(\text{ಪ} + \text{ಮ})$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ **ವಜಾಬಾಕಿ** $(\text{ಪ} - \text{ಮ})$, ಇವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರವು ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗ** ಉಣಾ **ಎರಡನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗ** $(\text{ಪ}^{೨} - \text{ಮ}^{೨})$, ಇಷ್ಟು ಇರುವದು. ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

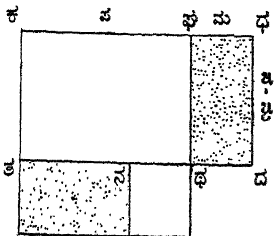
$$
\begin{aligned}
(\text{ಪ} + \text{ಮ})(\text{ಪ} - \text{ಮ}) &\equiv \text{ಪ}(\text{ಪ} + \text{ಮ}) - \text{ಮ}(\text{ಪ} + \text{ಮ}) \\
&\equiv \text{ಪ}^{೨} + \text{ಪಮ} - \text{ಪಮ} - \text{ಮ}^{೨} \\
&\equiv \text{ಪ}^{೨} - \text{ಮ}^{೨}.
\end{aligned}
$$

ಈಗ ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನಂದರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ $(\text{ಪ}^{೨} - \text{ಮ}^{೨})$ ಈ ರಾಶಿಯು $(\text{ಪ} + \text{ಮ})$ ಮತ್ತು $(\text{ಪ} - \text{ಮ})$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ನಮಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವ ಹಂತಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮವನ್ನು ಆ ಗುಣಾಕಾರದ ($\text{ಪ}^{೨} - \text{ಮ}^{೨}$ ದ) ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಏನು ಆಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$
\begin{aligned}
\text{ಪ}^{೨} - \text{ಮ}^{೨} &\equiv \text{ಪ}^{೨} + \text{ಪಮ} - \text{ಪಮ} - \text{ಮ}^{೨} \\
&\equiv \text{ಪ}(\text{ಪ} + \text{ಮ}) - \text{ಮ}(\text{ಪ} + \text{ಮ}) \\
&\equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ})(\text{ಪ} - \text{ಮ}).
\end{aligned}
$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. **ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುವದು.** ಈ ವಿಧಾನವು **ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಗೆ ಸರಿಯಿರುವದು,** ಎಂಬ ನಮಗೆ ಹಿಂದೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ವಿಧಾನದ ಕೇವಲ **ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ.**

೬·೧೮. ಈಗ ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಆಕೃತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಮಗೆ ಹೇಗೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.



ಆಕೃತಿ ೫.

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯೊಳಗಿನ **ಕಖಗಘ** ಇದೊಂದು ಪ ಇಂ. ಭುಜವಿರುವ ಚೌರಸವಿದೆ. ಮತ್ತು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅದರದೇ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ **ನಲಗಥ** ಈ ಮ ಇಂ. ಭುಜವಿರುವ ಎರಡನೆಯದೊಂದು ಚೌರಸವಿರುವದು. ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ-ಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $ಪ^2$ ಚೌ. ಇಂ. ಮತ್ತು $ಮ^2$ ಚೌ. ಇಂ. ಇವೆಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಮೊದಲನೆಯ ಚೌರಸಿನೊಳಗಿಂದ ಎರಡನೇ ಚೌರಸವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಆಕೃತಿಯ (**ಕಖಲನಥಘ**ದ) ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ($ಪ^2 - ಮ^2$) ಚೌ. ಇಂ. ಇದೆ. ಈ ಉಳಿದ ಆಕೃತಿಯೊಳಗಿನ **ತಖಲನ** ಈ ಭಾಗವು ಕಾಟ-ಕೋನ ಚೌಕೋನವಿದ್ದು **ತನ**ದ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಪ − ಮ) ಇಂ. ಅಂದರೆ **ಘಥ**ದಷ್ಟು ಇರುವದು. ಮತ್ತು **ತಖ**ದ್ದು ಮ ಇಂ. ಇದೆ. ಈ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದು **ಕತಥಘ**ಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ **ಕತದಧ** ಈ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನವು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು. ಈ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ **ಕಧ**ದ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಪ + ಮ) ಇಂ. ಇದ್ದು **ಕತ**ವು (ಪ − ಮ) ಇಂ. ಇರುವದು. ಅಂದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಪ + ಮ) (ಪ − ಮ) ಚೌ. ಇಂ. ಇದೆ. ಈಗ ಈ ಕಾಟ-

ಕೋನ ಚೌಕೋನವು ಮೂಲ ಚೌರಸ **ಕಖಗಘ** (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $ಪ^{೨}$) ಇದರೊಳಗಿಂದ **ನಲಗಥ** ಈ ಚೌರಸವನ್ನು (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $ಮ^{೨}$) ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಉಳಿಯುವ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$ಪ^{೨} - ಮ^{೨} \equiv (ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ).$$

೬·೧೯. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಉ. ೧. $೪ಯ^{೨} - ೨೫ರ^{೨} \equiv (೨ಯ)^{೨} - (೫ರ)^{೨}$ *
$\equiv (೨ಯ + ೫ರ)(೨ಯ - ೫ರ).$

ಉ. ೨. $೬೨೫ - ೧೨೧ಯ^{೨} \equiv (೨೫)^{೨} - (೧೧ಯ)^{೨}$*
$\equiv (೨೫ + ೧೧ಯ)(೨೫ - ೧೧ಯ).$

ಉ. ೩. $೩೬ಪ^{೨} - \frac{೪}{೯}ಮ^{೨} \equiv (೬ಪ)^{೨} - (\frac{೨}{೩}ಮ)^{೨}$
$\equiv (೬ಪ + \frac{೨}{೩}ಮ)(೬ಪ - \frac{೨}{೩}ಮ).$

ಉ. ೪. $೧೪೪ರ^{೨} - \frac{೧}{೧೨೧ಲ^{೨}} \equiv (೧೨ರ)^{೨} - \left(\frac{೧}{೧೧ಲ}\right)^{೨}$*

$$\equiv \left(೧೨ರ + \frac{೧}{೧೧ಲ}\right)\left(೧೨ರ - \frac{೧}{೧೧ಲ}\right).$$

ಉ. ೫. $೧೨ಅಯ^{೨} - ೭೫ಅಕ್ಷ^{೨}$. ಇಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಮೇಲೆ ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸೂತ್ರವು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲವೆಂದು ಎನಿಸುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ೩ಅ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದು ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದೊಡನೆಯೇ $೪ಯ^{೨} - ೨೫ಕ್ಷ^{೨}$ ಈ ಎರಡನೆಯ ಅವಯವವು ಉಳಿಯುವದು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹಚ್ಚಲು ಬರುವದೆಂಬುದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಅಂದರೆ ತರುವಾಯ ಮುಂದೆ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಕೆಲಸವು ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಈ ಸಂಗತಿಯ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು ಹಿಂದೆ ಒಂದೆರಡುಸಲ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅದು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳೇ ಮಹತ್ವವುಳ್ಳದ್ದು ಇರುವದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಪುನಃ ಒಂದು ಸಲ ಹೇಳುವದು ಇಷ್ಟವೆನಿಸುತ್ತದೆ.

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯು ಆದ ಬಳಿಕ ನಮಗೆ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

$೧೨ಅಯ^2 - ೭೫ಅಕ್ಷ^2 \equiv ೩ಅ(೪ಯ^2 - ೨೫ಕ್ಷ^2)$

$\equiv ೩ಅ(೨ಯ + ೫ಕ್ಷ)(೨ಯ - ೫ಕ್ಷ).$

ಉ. ೬. $೧೦೦ಯ^2 - (೪ರ - ೭ಲ)^2$

$\equiv ೧೦೦ಯ^2 - ಮ^2$* [೪ರ−೭ಲ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$\equiv (೧೦ಯ + ಮ)(೧೦ಯ - ಮ)$

$\equiv (೧೦ಯ + ೪ರ - ೭ಲ)\{೧೦ಯ - (೪ರ - ೭ಲ)\}$

[$\because$ **ಮ** $= ೪ರ - ೭ಲ$]

$\equiv (೧೦ಯ + ೪ರ - ೭ಲ)(೧೦ಯ - ೪ರ + ೭ಲ).$

ಉ. ೭. $೨೫(೮ಯ - ೫ರ)^2 - ೩೬(೩ರ - ೪ಲ)^2$

$\equiv ೨೫ಪ^2 - ೩೬ಮ^2$[೮ಯ−೫ರ ದ ಬದಲಾಗಿ **ಪ** ಮತ್ತು ೩ರ−೪ಲ ದ ಬದಲಾಗಿ **ಮ** ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$\equiv (೫ಪ + ೬ಮ)(೫ಪ - ೬ಮ)$*

$\equiv \{೫(೮ಯ - ೫ರ) + ೬(೩ರ - ೪ಲ)\}$

$\{೫(೮ಯ - ೫ರ) - ೬(೩ರ - ೪ಲ)\}$

$\equiv (೪೦ಯ - ೨೫ರ + ೧೮ರ - ೨೪ಲ)(೪೦ಯ - ೨೫ರ - ೧೮ರ + ೨೪ಲ)$

$\equiv (೪೦ಯ - ೭ರ - ೨೪ಲ)(೪೦ಯ - ೪೩ರ + ೨೪ಲ).$

ಉ. ೮. $ಪ^4 - ಮ^4 \equiv (ಪ^2)^2 - (ಮ^2)^2$ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಡಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

$\equiv (ಪ^2 + ಮ^2)(ಪ^2 - ಮ^2)$

$\equiv (ಪ^2 + ಮ^2)(ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ).$

ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದರೆ ತೆಗೆಯಲು ಶಕ್ಯವಿರುವ ಅದರ ಎಲ್ಲ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ತೋರಿಸುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರೀ $(ಪ^2 + ಮ^2)(ಪ^2 - ಮ^2)$ ಬರೆದರೆ ಸಾಗದು. $ಪ^2 - ಮ^2$ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವದಾದರೂ ಅತಿ ಅವಶ್ಯವಿದೆ.

$ಪ^2 + ಮ^2$ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದಿಲ್ಲವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಚನ್ನಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಲ ತಪ್ಪು ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಅನುಭವಕ್ಕೆ ಬಂದ ಮೂಲಕ ಬೇಕಂತಲೇ ಈ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

---

*ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ನಮಗೆ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಲು ಬರುವದು. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕಾಲುಗಾಡಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.)

೧. $ಪ^{೨}-೧೬$. ೨. $೨೫-ಮ^{೨}$. ೩. $೩೬ಪ^{೨}-೮೧ಮ^{೨}$.

೪. $೬೪ಅ^{೨}-೪೯ಕ^{೨}$. ೫. $೧೯೬ಯ^{೨}-೧೨೧ರ^{೨}$. ೬. $೨೫ಯ^{೨}-೧೬೯ಲ^{೨}$.

೭. $೧೪೪ರ^{೨}-೮೧ಸ^{೨}$. ೮. $೬೪ಮ^{೨}-೨೨೫ನ^{೨}$.

೯. $೩೬೧ಪ^{೨}-೧೦೦ಕ^{೨}$. ೧೦. $೮೧ತ^{೨}-೪೦೦ದ^{೨}$.

೧೧. $೪೯ಯ^{೨}-೮೪೧ಲ^{೨}$. ೧೨. $೩೬೧ರ^{೨}-೮೧ಸ^{೨}$.

೧೩. $೪ಪ^{೨}-೯೬೧ಫ^{೨}$. ೧೪. $೧೦೦ಕ^{೨}-೯ಗ^{೨}$.

೧೫. $೨೨೫ಕ^{೨}-೧೯೬ಜ^{೨}$. ೧೬. $೧೮ನ^{೨}-೯೮ಮ^{೨}$.

೧೭. $೨೦ಮ^{೨}-೧೨೫ಯ^{೨}$. ೧೮. $೧೦೮ಯ^{೨}-೭೫ರ^{೨}$.

೧೯. $೨೦೦ಪ^{೨}-೩೯೨ಬ^{೨}$. ೨೦. $೬೪ಅ^{೨}-೧೪೪ಮ^{೨}$.

೨೧. $೨೫ಪ^{೨}-\frac{೧}{೨೫}ಭ^{೨}$. ೨೨. $\frac{೧}{೪}ಕ^{೨}-೩೬ಗ^{೨}$.

೨೩. $\frac{೧}{೩೬}ಯ^{೨}-\frac{೧}{೬೪}ರ^{೨}$. ೨೪. $\frac{೧}{೨೫ಪ^{೨}}-೩೬$.

೨೫. $\frac{೩೬}{೪೯}ಪ^{೨}-೨೫ಮ^{೨}$. ೨೬. $ಯ^{೨}-\frac{೬೪}{೮೧}ಮ^{೨}$.

೨೭. $\frac{೯}{೧೬}ಪ^{೨}-\frac{೨೫}{೮೧ಮ^{೨}}$. ೨೮. $೯೦೦ಕ^{೨}ಯ^{೨}-೪೦೦ಸ^{೨}$.

೨೯. $೧೪೭ಪ^{೨}ರ^{೨}-೧೯೨ಲ^{೨}$. ೩೦. $೧೫೦ತ^{೨}ಪ^{೨}-೯೬ತ^{೨}ಮ^{೨}$.

೩೧. $೪೪೮ನಯ^{೨}-೬೩ನಲ^{೨}$. ೩೨. $೫೦ಪ^{೨}ರ^{೨}-೧೨೮ಬ^{೨}ಲ^{೨}$.

೩೩. $೧೬ಅ^{೪}-೮೧ಕ^{೪}$. ೩೪. $ಯ^{೪}-೨೫೬ಲ^{೪}$.

೩೫. $೩೨೫ಪ^{೪}-೨೫೬ಮ^{೪}$. ೩೬. $೩೨ರ^{೪}-೧೨೫೦ಸ^{೪}$.

೩೭. $೧೬ಅದ^{೪}-೨೫೬ಅನ^{೪}$. ೩೮. $೪-೩೨೪ನ^{೪}$.

೩೯. $(೫ಯ-೨ರ)^{೨}-೧೬ಲ^{೨}$. ೪೦. $(೮ಯ+೫ಲ)^{೨}-೩೬ಸ^{೨}$.

೪೧. $೧-(೨ಯ-೩ರ+೫ಲ)^{೨}$ ೪೨. $೪(೨ಯ-೭ರ)^{೨}-೯(೮-೪ಸ)^{೨}$.

೪೩. $೧೬(೩ಯ+೫ರ)^{೨}-೪೯(ರ-೮ಸ)^{೨}$.

೪೪. $೨೫(೨ಪ-೩ಮ)^{೨}-೪(೨ಮ-೫ಸ)^{೨}$.

೪೫. $(೭ಪ-೪ಬ)^{೨}-(೪ಪ+೩ಬ)^{೨}$.

೪೬. $೧೬(೨ಯ+೭ರ)^{೨}-೪೯(೪ರ-ಯ)^{೨}$. ೪೭. $೪ಪ^{೬}-೯ಬ^{೬}$.

೪೮. $೨೫ಪ^{೮}-೬೪ಮ^{೮}$. ೪೯. $೧೬ಪ^{೮}-೮೧ಮ^{೮}$.

೫೦. $೧೬ಕ^{೨}ಯ^{೪}-೮೧ಪ^{೨}ಸ^{೪}$. ೫೧. $೨ಯ^{೫}-೩೨ಯಲ^{೪}$.

೫೨. $(೪ಯ^{೨}-೫ಯರ-೭ರ^{೨})^{೨}-(೨ಯ^{೨}-೩ಯರ+೭ರ)^{೨}$.

೬·೨೦. ಪ^೨ − ಮ^೨ ≡ (ಪ + ಮ) (ಪ − ಮ) ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಮಾಡಲು ಬರುವ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ, ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ತೆಗೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ೪ಯ^೨−೨೫ರ^೨−೮ಯ+೨೦ರ

≡ (೪ಯ^೨−೨೫ರ^೨)−(೮ಯ−೨೦ರ)

≡ (೨ಯ+೫ರ) (೨ಯ−೫ರ)−೪(೨ಯ−೫ರ)

≡ (೨ಯ−೫ರ) (೨ಯ+೫ರ−೪).

ಉ. ೨. ೨೫ಯ^೨ + ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ − ೮೧ಸ^೨.

ಇಲ್ಲಿ ೨೫ಯ^೨ + ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ ಇದು ೫ಯ + ೨ರ ಇದರ **ವರ್ಗ**ವಿದೆ, ಮತ್ತು ಮುಂದೆ **ಋಣಾ** ೮೧ಸ^೨ ಇದೆ. ಅಂದರೆ ರಾಶಿಯು **ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ** ಸ್ವರೂಪದ್ದಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ,

೨೫ಯ^೨+೨೦ಯರ+೪ರ^೨−೮೧ಸ^೨ ≡ (೫ಯ+೨ರ)^೨−(೯ಸ)^೨

≡ (೫ಯ+೨ರ+೯ಸ)(೫ಯ+೨ರ−೯ಸ).

ಉ. ೩. ೧೪೪ಪ^೨ −೩೬ಬ^೨+೬೦ಬಮ−೨೫ಮ^೨. ಇಲ್ಲಿ ೧೪೪ಪ^೨, ೩೬ಬ^೨, ಮತ್ತು ೨೫ಮ^೨ ಇವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ೩೬ಬ^೨, ೨೫ಮ^೨, ಮತ್ತು ೬೦ಬಮ ಈ ಮೂರು ಪದಗಳ ಗುಂಪು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಮಗೆ **ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ** ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲು ಬಂದರೆ, ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

೧೪೪ಪ^೨ − ೩೬ಬ^೨ + ೬೦ಬಮ − ೨೫ಮ^೨

≡ ೧೪೪ಪ^೨ − (೩೬ಬ^೨ − ೬೦ಬಮ + ೨೫ಮ^೨)

≡ (೧೨ಪ)^೨ − (೬ಬ − ೫ಮ)^೨

≡ { ೧೨ಪ + (೬ಬ − ೫ಮ) } { ೧೨ಪ − (೬ಬ − ೫ಮ) } *

≡ (೧೨ಪ + ೬ಬ − ೫ಮ) (೧೨ಪ − ೬ಬ + ೫ಮ).

ಉ. ೪. ೧೦೦ಯ^೨ − ೨೦ಯರ + ರ^೨ − ೨೫ಲ^೨ + ೬೦ಲಸ − ೩೬ಸ^೨. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಪದಗಳ ಭಾಗವು ೧೦ಯ−ರ ದ **ವರ್ಗ**ವಿದೆ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವದು. ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿ ಮಂಡಿಸುವದರಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಋಣಾ ೫ಲ−೬ಸ ದ ವರ್ಗ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

೧೦೦ಯ^{೨} − ೨೦ಯರ + ರ^{೨} − ೨೫ಲ^{೨} + ೬೦ಲಸ − ೩೬ಸ^{೨}

≡ (೧೦೦ಯ^{೨} − ೨೦ಯರ + ರ^{೨}) − (೨೫ಸ^{೨} − ೬೦ಲಸ + ೩೬ಸ^{೨})

≡ (೧೦ಯ − ರ)^{೨} − (೫ಲ − ೬ಸ)^{೨}

≡ { (೧೦ಯ−ರ)+(೫ಲ−೬ಸ) } { ೧೦ಯ−ರ−(೫ಲ−೬ಸ) } *

≡ (೧೦ಯ − ರ + ೫ಲ − ೬ಸ) (೧೦ಯ − ರ − ೫ಲ + ೬ಸ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೪.

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. ೪ಪ^{೨}−೯ಮ^{೨}+೧೦ಪ−೧೫ಮ. ೨. ೩೬ಯ^{೨}−೨೫ರ^{೨}+೧೨ಯ+೧೦ರ.

೩. ೮೧ಬ^{೨}−೧೬ಮ^{೨}+೧೮ಬ−೮ಮ. ೪. ೨೫ರ^{೨}−೧೨೧ಸ^{೨}+೧೫ರ+೩೩ಸ.

೫. ೧೪೪ತ^{೨}−೧೬೯ದ^{೨}−೨೪ತ−೨೬ದ. ೬. ೧೦೦ಪ^{೨}−೮೧ಬ^{೨}−೧೦ಪ+೯ಬ.

೭. ೮ಯ^{೨}−೨ರ^{೨}−೧೦ಯ+೫ರ. ೮. ೨೭ರ^{೨}−೪೮ಸ^{೨}−೧೨ರ−೧೬ಸ.

೯. ೧೪೪ಯ^{೨} − ೧೯೬ಸ^{೨} − ೧೮ಯ + ೨೧ಸ.

೧೦. ೪ಯ^{೨} − ೪ಯಕ್ಷ + ಕ್ಷ^{೨} − ೧೬ನ^{೨}.

೧೧. ೯ಪ^{೨} + ೨೪ಪಮ + ೧೬ಮ^{೨} − ೬೪ಗ^{೨}.

೧೨. ೧೨೧ಯ^{೨} − ೨೫ರ^{೨} − ೩೦ರಲ − ೯ಲ^{೨}.

೧೩. ೧೪೪ಯ^{೨} − ೩೬ಲ^{೨} + ೬೦ಲಸ − ೨೫ಸ^{೨}.

೧೪. ೬೪ಪ^{೨}−೮೦ಪಬ+೨೫ಬ^{೨}−೩೬. ೧೫. ೮೧−೪ದ^{೨}+೨೮ದನ−೪೯ನ^{೨}.

೧೬. ೧೮ನ^{೨} − ೮೪ನಮ + ೯೮ಮ^{೨} − ೫೦ವ^{೨}.

೧೭. ೩ತ^{೨} − ೨೪ತದ + ೪೮ದ^{೨} − ೧೦೮ರ^{೨}.

೧೮. ೫ಯ^{೨} − ೪೫ರ^{೨} + ೧೨೦ರಲ − ೮೦ಲ^{೨}.

೧೯. ೨೫ಯ^{೨} − ೩೦ಯರ + ೯ರ^{೨} − ಲ^{೨} − ೧೦ಲಸ − ೨೫ಸ^{೨}.

೨೦. ೪ಪ^{೨} + ೨೮ಪಬ + ೪೯ಬ^{೨} − ೯ಭ^{೨} − ೬ಭಮ − ಮ^{೨}.

೨೧. ೪೯ತ^{೨} + ೭೦ತದ + ೨೫ದ^{೨} − ೪ಧ^{೨} + ೧೨ಧನ − ೯ನ^{೨}.

೨೨. ಕ^{೨} − ೧೪ಕಖ + ೪೯ಖ^{೨} − ೯ಗ^{೨} + ೬೦ಗಘ − ೧೦೦ಘ^{೨}.

* ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಆಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲವೆಂಬ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸವಿದ್ದರೆ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಡಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

೫.

$ಪ^{೩} \pm ಮ^{೩}$

೬·೨೧. ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರಿಜು ($ಪ^{೩} + ಮ^{೩}$) ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಘನಗಳ **ವಜಾಬಾಕಿ** ($ಪ^{೩} - ಮ^{೩}$) ಇವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದೋ ಹೇಗೆ ಮತ್ತು ಬರುವಪಾದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದರ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಮಗೆ ಈಗ ಮಾಡುವದಿದೆ. ಹಿಂದೆ **ಪ. ೪. ೭.** ರಲ್ಲಿ **ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು** ಮತ್ತು **ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು** ಊಣಾ ಆ **ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ,** ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ($ಪ + ಮ$ ಗುಣಿಲೆ $ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}$) **ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ** ($ಪ^{೩} + ಮ^{೩}$) ಸರಿ ಇರುವದು, ಮತ್ತು

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಮತ್ತು **ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು** ಅಧಿಕ **ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ** ಇವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರವು** ($ಪ - ಮ$ ಗುಣಿಲೆ $ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}$) **ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಗೆ** ($ಪ^{೩} - ಮ^{೩}$) ಸರಿ ಇರುವದು ಎಂದು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ

$ಪ + ಮ$ ಮತ್ತು $ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು $ಪ^{೩} + ಮ^{೩}$, ಹಾಗೂ $ಪ - ಮ$ ಮತ್ತು $ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು $ಪ^{೩} - ಮ^{೩}$ ಇರುವದು ಎಂದು ನಾವು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರುವೆವು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಾವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು. ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು, ಆದರಂತೆಯೇ ವಜಾಬಾಕಿ, ಇವುಗಳ ಅವಯುವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅವು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವವು.

$$ಪ^{೩} + ಮ^{೩} \equiv (ಪ + ಮ)(ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}),$$

$$\text{ಮತ್ತು } ಪ^{೩} - ಮ^{೩} \equiv (ಪ - ಮ)(ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}).$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಯಾವದೊಂದು ರಾಶಿಯು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ

ಆದರ ಎರಡು ಅವಯುವಗಳು ಉಂಟಾಗುವವು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಅವಯುವವು, ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು, ವಜಾಬಾಕಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಅವಯುವವು ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಇಲ್ಲವೆ ಅಧಿಕ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದು. [ಎರಡು ಘನಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವ ಚಿನ್ಹವು (+ ಇಲ್ಲವೆ –) ಇರುವದೋ ಅದೇ ಮೊದಲಿನ ಅವಯುವದಲ್ಲಿಯ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಆದರ ವಿರುದ್ಧವಾದ ಚಿನ್ಹವು (– ಇಲ್ಲವೆ +) ಎರಡನೆಯ ಅವಯುವದಲ್ಲಿಯ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಹಿಂದೆ ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಅವಯುವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಕೆಲಸವು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗುವದು.]

ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ನಿಯಮಗಳು (ಇಲ್ಲವೆ ಸೂತ್ರಗಳು) ತತ್ವತಃ ಒಂದೇ ಇರುವವು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಗರ್ಭಿತಾರ್ಥವು ಒಂದೇ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ (ಇಲ್ಲವೆ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ) ಆಗುವದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಮೊದಲಿನದೇ ನಿಯಮವನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು) ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡನೆಯ ಸೂತ್ರವು ಹೇಗೆ ದೊರೆಯುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಪ೩ – **ಮ**೩ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ, ಪ೩ + (– **ಮ**೩) ಎಂದು ಅಂದರೆಯೇ ಪ೩ + (–ಮ)೩ ಎಂದು ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\text{ಪ}^{೩} - \text{ಮ}^{೩} = \text{ಪ}^{೩} + (-\text{ಮ}^{೩})$$
$$= (\text{ಪ})^{೩} + (-\text{ಮ})^{೩}$$
$$= \{ \text{ಪ}+(-\text{ಮ}) \} \{ \text{ಪ}^{೨}-\text{ಪ}(-\text{ಮ})+(-\text{ಮ})^{೨} \}$$
$$= (\text{ಪ} - \text{ಮ}) (\text{ಪ}^{೨} + \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^{೨}).$$

ಇಲ್ಲಿ **ಪ೩ + ಮ೩ ≡ (ಪ + ಮ)(ಪ೨ – ಪಮ + ಮ೨)** ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ೩ – ಮ೩ ದ ಅವಯುವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ.

೬·೨೨. ಪ೩ + ಮ೩ ಮತ್ತು **ಪ೩ – ಮ೩** ದ ಅವಯುವಗಳನ್ನು

ನಮಗೆ ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಪರಿಚ್ಛೇದ ೪·೧ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ ನಾವು

$$(ಪ + ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩} + ಮ^{೩} + ೩ಪಮ(ಪ + ಮ)$$

ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರುವೆವು. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಏನು ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$(ಪ + ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩} + ಮ^{೩} + ೩ಪಮ(ಪ + ಮ)$$

$$\therefore \quad ಪ^{೩} + ಮ^{೩} \equiv (ಪ + ಮ)^{೩} - ೩ಪಮ(ಪ + ಮ)$$
$$\equiv (ಪ + ಮ)\{(ಪ + ಮ)^{೨} - ೩ಪಮ\}$$
$$\equiv (ಪ + ಮ)(ಪ^{೨} + ೨ಪಮ + ಮ - ೩ಪಮ)$$
$$\equiv (ಪ + ಮ)(ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨})$$

ಅದರಂತೆಯೇ ಪ. ೪·೩ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ $(ಪ - ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩} - ಮ^{೩} - ೩ಪಮ(ಪ - ಮ)$ ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿದೆ. ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಏನು ಕಂಡುಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$(ಪ - ಮ)^{೩} \equiv ಪ^{೩} - ಮ^{೩} - ೩ಪಮ(ಪ - ಮ)$$

$$\therefore \quad ಪ^{೩} - ಮ^{೩} \equiv (ಪ - ಮ)^{೩} + ೩ಪಮ(ಪ - ಮ)$$
$$\equiv (ಪ - ಮ)\{(ಪ - ಮ)^{೨} + ೩ಪಮ\}$$
$$\equiv (ಪ - ಮ)(ಪ^{೨} - ೨ಪಮ + ಮ^{೨} + ೩ಪಮ)$$
$$\equiv (ಪ - ಮ)(ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨})$$

೬·೨೩. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯುವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೇಗೆ ಆಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡುವಾ.

ಉ. ೧. $ಅ^{೩} + ೨೭ಕ^{೩} \equiv (ಅ)^{೩} + (೩ಕ)^{೩}$ *
$$\equiv (ಅ + ೩ಕ)\{ಅ^{೨} - ಅ.೩ಕ + (೩ಕ)^{೨}\} \ *$$
$$\equiv (ಅ + ೩ಕ)(ಅ^{೨} - ೩ಅಕ + ೯ಕ^{೨}).$$

ಉ. ೨. $೬೪ - ನ^{೩} \equiv (೪)^{೩} - (ನ)^{೩}$ *
$$\equiv (೪ - ನ)\{(೪)^{೨} + ೪.ನ + ನ^{೨}\} \ *$$
$$\equiv (೪ - ನ)(೧೬ + ೪ನ + ನ^{೨}).$$

ಉ. ೩. $೧೨೫ರ^೩ - ೮ಸ^೩ \equiv (೫ರ)^೩ - (೨ಸ)^೩$*

$\equiv (೫ರ - ೨ಸ)\{(೫ರ)^೨ + ೫ರ.೨ಸ + (೨ಸ)^೨\}$ *

$\equiv (೫ರ - ೨ಸ)(೨೫ರ^೨ + ೧೦ರಸ + ೪ಸ^೨)$.

ಉ. ೪. $೫೪ಲ^೩ + ೧೨೫೦ವ^೩ \equiv ೨(೨೭ಲ^೩ + ೬೨೫ವ^೩)$

$\equiv ೨\{(೩ಲ)^೩ + (೫ವ)^೩\}$ *

$\equiv ೨(೩ಲ + ೫ವ)(೯ಲ^೨ - ೧೫ಲವ + ೨೫ವ^೨)$.

ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಕೆಗೆ ನಮಗೆ ಕೊಟ್ಟ ದ್ವಿಪದಿಯೊಳಗಿನ ಎರಡೂ ಪದಗಳು ಘನ-ಗಳಿಲ್ಲವೆಂದೆನಿಸುವದು, ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ೨ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಗುಣಪೃಥ-ಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಅದರಂತೆ ಇಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಎರಡು ಪದಗಳು ಎರಡು ಘನವಿರುವವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಉ. ೫. $೮೧ಪ^೨ಯ^೩ - ೧೯೨ಪ^೨ರ^೩$

$\equiv ೩ಪ^೨(೨೭ಯ^೩ - ೬೪ರ^೩)$

$\equiv ೩ಪ^೨\{(೩ಯ)^೩ - (೪ರ)^೩\}$

$\equiv ೩ಪ^೨(೩ಯ - ೪ರ)(೯ಯ^೨ + ೧೨ಯರ + ೧೬ರ^೨)$.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯಂತೆ ಇಲ್ಲಿ $೩ಪ^೨$ ಇದು ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಅದನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದರೆ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಎರಡು ಪದಗಳು ಎರಡು ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು.

ಉ. ೬. $೬೨೫ಅ^೪ + ೧೩೫ಅ \equiv ೫ಅ(೧೨೫ಅ^೩ + ೨೭)$

$\equiv ೫ಅ\{(೫ಅ)^೩ + (೩)^೩\}$

$\equiv ೫ಅ\{(೫ಅ + ೩)(೨೫ಅ^೨ - ೧೫ಅ + ೯)$.

---

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ತರುವಾಯ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಹಾಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಲು ಏನೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

ಉ. ೭. ೮(೨ಅ − ೩ಕ)^{3} − (೩ಅ − ೫ಕ)^{3}

≡ **೮ಪ**^{3} − **ಮ**^{3}* [೨ಅ−೩ಕದ ಬದಲಾಗಿ **ಪ** ಮತ್ತು ೩ಅ−೫ಕದ ಬದಲಾಗಿ **ಮ** ಬರೆದು]

≡ (**೨ಪ − ಮ**) (**೪ಪ**^{2} + **೨ಪಮ** + **ಮ**^{2})*

≡ { ೨(೨ಅ − ೩ಕ) − (೩ಅ − ೫ಕ) } { ೪(೨ಅ − ೩ಕ)^{2} + ೨(೨ಅ − ೩ಕ) (೩ಅ − ೫ಕ) + (೩ಅ − ೫ಕ)^{2} }

≡ (೪ಅ − ೬ಕ − ೩ಅ + ೫ಕ) { ೪(೪ಅ^{2} − ೧೨ಅಕ + ೯ಕ^{2}) + ೨(೬ಅ^{2} − ೧೯ಅಕ + ೧೫ಕ^{2}) + ೯ಅ^{2} − ೩೦ಅಕ + ೨೫ಕ^{2} }

≡ (ಅ − ಕ)(೧೬ಅ^{2} − ೪೮ಅಕ + ೩೬ಕ^{2} + ೧೨ಅ^{2} − ೩೮ಅಕ + ೩೦ಕ^{2} + ೯ಅ^{2} − ೩೦ಅಕ + ೨೫ಕ^{2})

≡ (ಅ − ಕ) (೩೭ಅ^{2} − ೧೧೬ಅಕ + ೯೧ಕ^{2}).

ಉ. ೮. ೨೭ರ^{3} − ೬೪ಸ^{3} − ೧೫ರ + ೨೦ಸ

≡ (೨೭ರ^{3} − ೬೪ಸ^{3}) − (೧೫ರ − ೨೦ಸ)

≡ (೩ರ − ೪ಸ) (೯ರ^{2} + ೧೨ರಸ + ೧೬ಸ^{2}) − ೫(೩ರ − ೪ಸ)

≡ (೩ರ − ೪ಸ) (೯ರ^{2} + ೧೨ರಸ + ೧೬ಸ^{2} − ೫).

ಉ. ೯. ಪ^{6} − ಮ^{6} ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಿಂದ ಮಂಡಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಪ^{6} ಮತ್ತು ಮ^{6} ಇವು ಪ^{2} ಮತ್ತು ಮ^{2} ಗಳ **ಘನ**ಗಳಿವೆ, ಅದರಂತೆಯೇ ಪ^{3} ಮತ್ತು ಮ^{3} ಗಳ **ವರ್ಗ**ಗಳಾದರೂ ಇರುವವು. ಆದುದರಿಂದ ಪ^{6} − ಮ^{6} ಈ ರಾಶಿಯು **ಎರಡು ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ**ಯನ್ನು ತೋರಿಸುವಂತೆಯೇ **ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ**ಯನ್ನು ಸಹ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು ಮೊದಲು ಅದು **ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ** ಇದೆಯೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ,

---

* ಈ ಎರಡು ಹಂತಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ ಎಂತಲ್ಲ. ನಮ್ಮದು ಅಷ್ಟು ತರಬೇತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

$$\begin{aligned} ಪ^{೬} - ಮ^{೬} &\equiv (ಪ^{೩})^{೨} - (ಮ^{೩})^{೨} \\ &\equiv (ಪ^{೩} + ಮ^{೩})(ಪ^{೩} - ಮ^{೩}) \\ &\equiv (ಪ+ಮ)(ಪ^{೨}-ಪಮ+ಮ^{೨})(ಪ-ಮ)(ಪ^{೨}+ಪಮ+ಮ^{೨}). \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ $ಪ^{೬} - ಮ^{೬}$ ದ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ **ನಾಲ್ಕು ಅವಯವಗಳು** ಬರುವವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಈಗ ನಾವು $ಪ^{೬} - ಮ^{೬}$ ಈ ರಾಶಿಯು **ಎರಡು ಘನಗಳ** ವಜಾಬಾಕಿ ಇರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ,

$$\begin{aligned} ಪ^{೬} - ಮ^{೬} &\equiv (ಪ^{೨})^{೩} - (ಮ^{೨})^{೩} \\ &\equiv (ಪ^{೨} - ಮ^{೨})(ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}) \\ &\equiv (ಪ + ಮ)(ಪ - ಮ)(ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}). \end{aligned}$$

ಯಾವದೇ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋದರೂ ಕೊನೆಗೆ ಅವೇ ಅವಯವಗಳು ಬರಬೇಕು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಹೊಳೆಯುವದೇನೆಂದರೆ $ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}$ ದ $ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಮತ್ತು $ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಇವು ಅವಯವಗಳಿರಬೇಕು. ಹಿಂದೆ **ಪ. ೫.** ೨ರಲ್ಲಿ $ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಮತ್ತು $ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಇವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರವು** $ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}$ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಾವು ಮುಂದಿನಂತೆ ಅನ್ನಬಹುದು. $ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}$ ದ $ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಮತ್ತು $ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}$ ಇವು **ಅವಯವಗಳಿವೆ.** ಆದರೆ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ನಮಗೆ $ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}$ ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನಾದರೂ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. $ಪ^{೪} + ೨ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}$ ಇದು $ಪ^{೨} + ಮ^{೨}$ ದ ವರ್ಗವಿದೆ. ಮತ್ತು '$ಪ^{೨}ಮ^{೨}$'ವು 'ಪಮ' ಇದರ ವರ್ಗವಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪}$ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು **ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ** ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದೆಂಬ ಕಲ್ಪನೆಯು ಹೊಳೆಯುವದಿಲ್ಲವೇ? ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪} &\equiv ಪ^{೪} + ೨ಪ^{೨}ಮ^{೨} - ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪} \\ &\equiv ಪ^{೪} + ೨ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪} - ಪ^{೨}ಮ^{೨} \\ &\equiv (ಪ^{೨} + ಮ^{೨})^{೨} - (ಪಮ)^{೨} \\ &\equiv (ಪ^{೨} + ಮ^{೨} + ಪಮ)(ಪ^{೨} + ಮ^{೨} - ಪಮ) \\ &\equiv (ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨})(ಪ^{೨} - ಪಮ + ಮ^{೨}). \end{aligned}$$

ಬೀಜಗಣಿತದೊಳಗಿನ ಇದೊಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ **ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು** ಇರುವದು. ಇದು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಲ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದರಿಂದ ಅದನ್ನು ನಾವು ಚನ್ನಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡ-ಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ವಿಶೇಷವೆಂಬುದೇನೂ ಮಾಡಿಲ್ಲ. ನಡುವಿನ ಪದವಾದ $ಪ^{೨}ಮ^{೨}$ವನ್ನು $೨ಪ^{೨}ಮ^{೨} - ಪ^{೨}ಮ^{೨}$ ಈ ಅನುಕೂಲವಾದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು **ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಗುಣಕ-ಸೂತ್ರವನ್ನು** ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

ಯಾವದೊಂದು ರಾಶಿಯೊಳಗಿನ ಯಾವದೇ ಪದವನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಿ, ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವ **ಗುಣಕ-ಸೂತ್ರ**ಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದಾದ-ರೊಂದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸ-ಲಾಗಿದೆ.

$ಯ^{೨} + ೧೦ಯ + ೨೧ - ರ^{೨} - ೪ರ$ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ನಮಗೆ ಮಾಡುವದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವ-ದೇನೆಂದರೆ $ಯ^{೨} + ೧೦ಯ + ೨೫$ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಪದಗಳಿದ್ದರೆ ಅದೊಂದು **ವರ್ಗ**ವಾಗುವದು. ಆದರೆ ಹೀಗೆ ಆಗಲು ೨೧ನ್ನು ೨೫-೪ ಹೀಗೆ ಮಂಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಮುಂದೆ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವ-ದೇನೆಂದರೆ ಹೀಗೆ ಮಂಡಿಸಿದರೆ ಉಳಿದ ಪದಗಳದಾದರೂ ಒಂದು **ವರ್ಗ**ವಾಗುವದು, ಮತ್ತು ರಾಶಿಗೆ **ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ** ಸ್ವರೂಪವು ದೊರೆಯುವದು. ಇದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$
\begin{aligned}
ಯ^{೨}+೧೦ಯ+೨೧-ರ^{೨}-೪ರ &\equiv ಯ^{೨}+೧೦ಯ+೨೫-೪-ರ^{೨}-೪ರ \\
&\equiv ಯ^{೨}+೧೦ಯ+೨೫-ರ^{೨}-೪ರ-೪ \\
&\equiv (ಯ^{೨}+೧೦ಯ+೨೫)-(ರ^{೨}+೪ರ+೪) \\
&\equiv (ಯ+೫)^{೨}-(ರ+೨)^{೨} \\
&\equiv (ಯ+೫+ರ+೨)(ಯ+೫-ರ-೨) \\
&\equiv (ಯ+ರ+೭)(ಯ-ರ+೩).
\end{aligned}
$$

$ಪ^೨ \pm ೨ಪಮ + ಮ^೨ \equiv (ಪ \pm ಮ)^೨$ ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಪದವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವಂಥ ಎರಡು ಪದಗಳೊಡನೆ ಮೂರನೆಯ ಯಾವ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆ **ತ್ರಿಪದಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ**ವಾಗಬಲ್ಲದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಪದವು **ಎರಡನೆಯ ಪದದ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರದ** ವರ್ಗವಿರುವದು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $೯ಅ^೨ \pm ೩೦ಅಕ$ ಇದರೊಡನೆ **$(೧೫ಅಕ \div ೩ಅ)^೨$,** ಅಂದರೆ **$(೫ಕ)^೨$** ಅಂದರೆಯೇ **$೨೫ಕ^೨$** ಇದ್ದರೆ ಆ **ತ್ರಿಪದಿಯು $(೯ಅ^೨ \pm ೩೦ಅಕ + ೨೫ಕ^೨)$ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ $(೩ಅ \pm ೫ಕ$ದ$)$** ಇರುವದು. ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಪದಗಳು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಜೊತೆಗೆ **ಅವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ** ಇದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಪದಿಯು **ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ**ವಿರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, **$೧೬ಅ^೨ + ೪೯ಕ^೨$**ದ ಜೊತೆಗೆ **$೨.೪ಅ.೭ಕ$,** ಅಂದರೆ **$೫೬ಅಕ$** ಇದ್ದರೆ ಆ **ತ್ರಿಪದಿಯು** $(೧೬ಅ^೨ \pm ೫೬ಅಕ + ೪೯ಕ^೨)$ **ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ** $(೪ಅ \pm ೭ಕ$ದ$)$ ಆಗುವದು.

ಉ. ೧೦. ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ $೬೪ರ^೬ - ೭೨೯ಸ^೬$ ಈ ಒಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಇದನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಿಂದ ಮಂಡಿಸಬಹುದು.

$೬೪ರ^೬ - ೭೨೯ಸ^೬$

$\equiv (೮ರ^೩)^೨ - (೨೭ಸ^೩)^೨$

$\equiv (೮ರ^೩ + ೨೭ಸ^೩)(೮ರ^೩ - ೨೭ಸ^೩)$

$\equiv (೨ರ + ೩ಸ)(೪ರ^೨ - ೬ರಸ + ೯ಸ^೨)(೨ರ - ೩ಸ)(೪ರ^೨ + ೬ರಸ + ೯ಸ^೨).$

$೬೪ರ^೬ - ೭೨೯ಸ^೬$

$\equiv (೪ರ^೨)^೩ - (೯ಸ^೨)^೩$

$\equiv (೪ರ^೨ - ೯ಸ^೨)(೧೬ರ^೪ + ೩೬ರ^೨ಸ^೨ + ೮೧ಸ^೪)$

$\equiv (೨ರ + ೩ಸ)(೨ರ - ೩ಸ)(೧೬ರ^೪ + ೭೨ರ^೨ಸ^೨ + ೮೧ಸ^೪ - ೩೬ರ^೨ಸ^೨)$*

$$\equiv (\text{೨ರ} + \text{೩ಸ})(\text{೨ರ} - \text{೩ಸ}) \{ (\text{೪ರ}^{೨} + \text{೯ಸ}^{೨})^{೨} - (\text{೬ರಸ})^{೨} \}$$

$$\equiv (\text{೨ರ} + \text{೩ಸ})(\text{೨ರ} - \text{೩ಸ})(\text{೪ರ}^{೨} + \text{೬ರಸ} + \text{೯ಸ}^{೨})(\text{೪ರ}^{೨} - \text{೬ರಸ} + \text{೯ಸ}^{೨}).$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೫.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. (ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದಲೇ ಬಿಡಿಸಿರಿ.)

೧. ಯ^{೩} + ೬೪ರ^{೩}.
೨. ಲ^{೩} − ೮ವ^{೩}.
೩. ೨೭ರ^{೩} + ೧೨೫ಸ^{೩}.
೪. ೨೧೬ಪ^{೩} + ೧೨೫ರ^{೩}.
೫. ೧ − ೧೨೫ಸ^{೩}.
೬. ೮ + ೩೪೩ಪ^{೩}.
೭. ಯ^{೩} − ೧೦೦೦ಕ್ಷ^{೩}.
೮. ೨೭ಪ^{೩} − ೩೪೩ಮ^{೩}.
೯. ೫೧೨ − ೨೭ಸ^{೩}.
೧೦. ೩೪೩ಕ್ಷ^{೩} − ೧.
೧೧. ಯ^{೩} − $\frac{೧}{೨೭}$.
೧೨. $\frac{೧}{೬೪}$ − ಪ^{೩}.
೧೩. ೮ವ^{೩} − $\frac{೧}{೨೭}$ಸ^{೩}.
೧೪. ಪ^{೩} − $\frac{೮}{೨೭}$ಬ^{೩}.
೧೫. ೩೪೩ರ^{೩} + ೬೪ಸ^{೩}.
೧೬. ೭೨೯ದ^{೩} + ೮ನ^{೩}.
೧೭. ೧ + ೧೩೩೧ಅ^{೩}.
೧೮. ಕ^{೩}ಗ^{೩} + ೮.
೧೯. ೧ − ಬ^{೩}ಮ^{೩}.
೨೦. ೮ಪ^{೩}ಬ^{೩} − ೩೪೩.
೨೧. ೪೮ಅ^{೩} − ೬ಗ^{೩}.
೨೨. ೮ಕ^{೩} − ೬೪ಗ^{೩}.
೨೩. ೧೫ಪ^{೩} + ೧೨೦ಪ^{೩}ಫ^{೩}.
೨೪. ೨೪೩ಪ^{೩} + ೭೨ಬ^{೩}.

* ಇಲ್ಲಿ ೩೬ರ^{೨}ಸ^{೨} ವನ್ನು ೭೨ರ^{೨}ಸ^{೨} − ೩೬ರ^{೨}ಸ^{೨} ಎಂದು ಮಂಡಿಸಿ ೧೬ರ^{೪} + ೩೬ರ^{೨}ಸ^{೨} + ೮೧ಸ^{೪} ಈ ಪದಾವಲಿಯನ್ನು **ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ** ಬರೆದಿದೆ ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ೪ರ^{೨} ದ ಸಲುವಾಗಿ ಪ^{೨} ಮತ್ತು ೯ಸ^{೨} ದ ಸಲುವಾಗಿ ಮ^{೨} ಬರೆದು ಈ ಪದಾವಲಿಯನ್ನು ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಸ^{೨} + ಮ^{೪} ದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಮತ್ತು ಬಳಿಕ ಪ^{೪} + ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ಮ^{೪} ≡ (ಪ^{೨} + ಪಮ + ಮ^{೨})(ಪ^{೨} − ಪಮ + ಮ^{೨}) ಈ ಗುಣಕ-ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಎರಡೂ ರೀತಿಗಳ ತುಲನೆಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಮಾರ್ಗವು ಅನುಕೂಲವಾದದ್ದು ಹಾಗೂ ಸುಲಭವಾದದ್ದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡು ಘನಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ಈ ಎರಡೂ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಾಗ ಅದನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುವದು ಇಷ್ಟವಾಗುವದು.

೨೫. $೫೦೦ಅ^{೪}ಯ^{೩}-೧೦೮ಅಕ್ಷ^{೩}$.

೨೬. $೪೩೨ಪ^{೩}ಬ^{೩}ಭ^{೩}+೫೪ಪ^{೩}ಮ^{೩}$.

೨೭. $(ಪ+ಬ)^{೩}+(ಪ-ಬ)^{೩}$.

೨೮. $(೨ದ+ನ)^{೩}-(೨ದ-ನ)^{೩}$.

೨೯. $೮(ಕ+ಗ)^{೩}-(ಕ+೨ಗ)^{೩}$.

೩೦. $(೪ಯ-೩ರ)^{೩}-(೩ಯ-೪ರ)^{೩}$.

೩೧. $ರ^{೩}-ಗ^{೩}+೫ಕ-೫ಗ$.

೩೨. $೮ಯ^{೩}-ರ^{೩}+೬ಯ-೩ರ$.

೩೩. $೨೭ಪ^{೩}-೮ಬ^{೩}-೧೨ಪ+೮ಬ$.

೩೪. $೬೪ಯ^{೩}+೨೭ರ^{೩}-೪ಯ-೩ರ$.

೩೫. $೧೨೫ಪ^{೩}+೮ಭ^{೩}-೨೦ಪ-೮ಭ$.

೩೬. $೮ಪ^{೩}+ಬ^{೩}+೮ಪ+೪ಬ$.

೩೭. $ಗ^{೩}+ಘ^{೩}+೩ಗ^{೨}-೩ಗಘ+೩ಘ^{೨}$.

೩೮. $೮ಕ^{೩}-ಗ^{೩}-೮ಕ^{೨}-೪ಕಗ-೨ಗ^{೨}$.

೩೯. $೨೭ಪ^{೩}-೧೨೫ಬ^{೩}-೨೭ಪ^{೨}-೪೫ಪಬ-೭೫ಬ^{೨}$.

೪೦. $ಕ^{೬}-೬೪ಗ^{೬}$.

೪೧. $ಕ^{೬}+ಗ^{೬}$.

೪೨. $ಪ^{೬}+೬೪ಗ^{೬}$.

೪೩. $೮ಯ^{೬}+೨೭ಕ್ಷ^{೬}$.

೪೪. $೮ಯ^{೬}-೧೨೫ಸ^{೬}$.

೪೫. $೭೨೯ಪ^{೬}-ಮ^{೬}$.

೪೬. $೬ಅ^{೬}-೪೮ಕ^{೩}$.

೪೭. $೨೭ಕ^{೯}-೬೪ಘ^{೯}$.

೪೮. $೪೦೯೬ಯ^{೧೨}-ರ^{೧೨}$.

೪೯. $೧೬ದ^{೩}+೫೪ನ^{೩}-೧೦ದ-೧೫ನ$.

೫೦. $೮ಪ^{೩}+೪ಪ^{೨}ಬ+೬ಪಬ^{೨}+೨೭ಬ^{೩}$.

೫೧. $೨೭ಕ^{೩}-೯ಕ^{೨}ಗ-೧೨ಕಗ^{೨}+೬೪ಗ^{೩}$.

೫೨. $೧೨೫ರ^{೩}+೧೦೦ರ^{೨}ಸ-೮ರಸ^{೨}-೬೪ಸ^{೩}$.

೫೩. $೮ಯ^{೩}-೬ಯ^{೨}ಕ್ಷ+೧೫ಯಕ್ಷ^{೨}-೧೨೫ಕ್ಷ^{೩}$.

ಏಳನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ (ಮುಂದೆಸಾಗಿದುದು)

$ಪಯ^{೨}+ಬಯ+ಮ$

೧.

೭.೧. ಇನ್ನು **$ಪಯ^{೨}+ಬಯ+ಮ$** ದಂಥ **ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ**ವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಪದಗಳು **ಮೂರು. ಯ**ದ **ವರ್ಗ**ವಿರುವಂಥ ಒಂದು ಪದ, ಯದ **ಪ್ರಥಮ ಘಾತವಿರುವಂಥ** ಒಂದು ಪದ, ಮತ್ತು ಅದರ **ಅಭಾವವಿರುವ,** ಅಂದರೆಯೇ ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಅದು **ಇಲ್ಲವೋ** ಅಂಥ ಒಂದು ಪದ. ಪ ಮತ್ತು **ಬ** ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **$ಯ^{೨}$** ಮತ್ತು **ಯ** ಇವುಗಳ **ಸಹಗುಣಕಗಳಿರುವವು.** ನಮ್ಮ ಇಂದಿನ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಷೇತ್ರದ ಮರ್ಯಾದೆಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಂಡರೆ, ನಾವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾದ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ **ಪ, ಬ, ಮ** ಇವು **ಜ್ಞಾತ (ವ್ಯಕ್ತ)** ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವವು. ಅಂದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು $೬ಯ^{೨}+೧೭ಯ+೫$, $೧೨ರ^{೨}-೨೩ರ+೧೦$, $೨ವ^{೨}+೩ವ-೧೪$, $ಕ್ಷ^{೨}-೭ಕ್ಷ-೮$, ಈ ತರಹದ್ದಿರುವವು. ಇಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ನಾಲ್ಕು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೬, ಬ = ೧೭, ಮ = ೫, ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ, ಪ = ೧೨, ಬ = −೨೩, **ಮ** = ೧೦, ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೨, ಬ = ೩, ಮ = −೧೪, ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೧, ಬ = − ೭, ಮ = − ೮.

೭.೨. **$ಪಯ^{೨}+ಬಯ+ಮ$** ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ '**ಪ**', '**ಬ**', ಮತ್ತು '**ಮ**' ಈ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವಾದ ಗುಣಕವು ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಗೃಹೀತವೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದೆ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂರೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $೪ವ^{೨}+೬ವ-೨೮$ ಇಂಥ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದರೆ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣಗುಣಕವೆಂದು ತೋರಿಬರುವ ೨ ಈ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಕೊಟ್ಟ

ರಾಶಿಯನ್ನು ೨(೨ವ^{೨} + ೩ವ − ೧೪) ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ತರುವಾಯ **೨ವ^{೨} + ೩ವ** − ೧೪ ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಸಹಜವಾಗಿ **ಪಯ^{೨} + ಬಯ + ಮ** ಇದರಲ್ಲಿ **ಏಕಪದ** ಗುಣಕವಿರದೇ ಅದರೊಳಗಿನ ಗುಣಕಗಳು **ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದ** ಅಂದರೆ **ಅಯ + ಕ** ಈ ಸ್ವರೂಪದವು ಇರುವವು.

೭·೩. ಇನ್ನು ನಾವು ಇಂಥ ದ್ವಿಪದಿಗಳ (ಅಯ + ಕ ಈ ಸ್ವರೂಪದ) ನಾಲ್ಕು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ತರುವಾಯ ಆ ಗುಣಾಕಾರದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾ, ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಡುಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

(೧)

೨ಯ + ೫
೩ಯ + ೪
―――――
೬ಯ^{೨} + ೧೫ಯ
 + ೮ಯ + ೨೦
―――――
೬ಯ^{೨} + ೨೩ಯ + ೨೦

(೨)

೩ಯ − ೫
೮ಯ − ೭
―――――
೨೪ಯ^{೨} − ೪೦ಯ
 − ೨೧ಯ + ೩೫
―――――
೨೪ಯ^{೨} − ೬೧ಯ + ೩೫

(೩)

೭ಯ − ೩
೨ಯ + ೯
―――――
೧೪ಯ^{೨} − ೬ಯ
 + ೬೩ಯ − ೨೭
―――――
೧೪ಯ^{೨} + ೫೭ಯ − ೨೭

(೪)

೪ಯ − ೫
೩ಯ + ೧
―――――
೧೨ಯ^{೨} − ೧೫ಯ
 + ೪ಯ − ೫
―――――
೧೨ಯ^{೨} − ೧೧ಯ − ೫

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಗುಣಾಕಾರವು **ಪಯ^{೨} + ಬಯ + ಮ** ಈ ಸ್ವರೂಪದ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯು ಇದ್ದು ಅದರ ಮೊದಲನೆಯ ಪದವು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಲಾದ ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಮೊದಲನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿದ್ದು, ಅದರ ಕೊನೆಯ ಪದವು ಅವುಗಳ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ನಡುವಿನ ಪದವು ಒಂದು ದ್ವಿಪದಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಕೊನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯದರ ಕೊನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು ಇರುವದು.

ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವ ಮತ್ತೂ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳು ಒಂದೇ ತರಹದವು (+ ಮತ್ತು +, ಇಲ್ಲವೆ – ಮತ್ತು –) ಇದ್ದರೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಚಿನ್ಹವು + ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳು ಭಿನ್ನ (+ ಮತ್ತು –) ಇದ್ದರೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಚಿನ್ಹವು – ಇರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಚಿನ್ಹವು + ಇದ್ದಾಗ ಅದರಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದದ ಚಿನ್ಹವು ಮತ್ತು ಗುಣಕದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಚಿನ್ಹಗಳು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತವೆ.

೭·೪. ಇಷ್ಟು ವಿವೇಚನದ ನಂತರ **ಪಯು**^{೨} + **ಬಯು** + **ಮ** ದಂಥ ಸ್ವರೂಪದ ಯಾವದೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ಅದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ೨ಯು^{೨} + ೧೧ಯು + ೫ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಇದರಲ್ಲಿ **ಅಯು** + **ಕ** ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಎರಡು ಗುಣಕಗಳು ಇರುವವು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಇನ್ನು ೨ಯು^{೨} ಇದರಲ್ಲಿ ಯು ಮತ್ತು ೨ಯು ಇವೇ ·ಯು ವರ್ಣವುಳ್ಳ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ಹೊರಡಬಲ್ಲವು. ಸಹಜವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳು (ಯು....) (೨ಯು....) ಈ ಸ್ವರೂಪದವು ಇರಬಹುದು. ಇನ್ನು ನಾವು ಈ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡನೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವಾ. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದವು ೫ ಇದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ೧ ಮತ್ತು ೫ ಇವೇ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ಹೊರಡುವವು. ಮತ್ತು ಇವೆರಡೂ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿಯ ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವವು. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದವು **ಧನ**ವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ೧ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಹಿಂದೆ ಯಾವದಾದರೂ ಒಂದೇ ಚಿನ್ಹವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದವು **ಧನ**ವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಆ ಚಿನ್ಹಗಳು + ಇರುವವು. ಇನ್ನು ೧ ಇದು ಯು ದೊಡನೆ ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು ೫ ಎರಡನೆಯ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಇರುವದೋ ಅಥವಾ ೫ ಇದು ಯು ದೊಡನೆ ಇದ್ದು ೧ ಇದು ಎರಡನೆಯ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಇರುವದೋ ಎಂಬುದಷ್ಟೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು. ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ ಗುಣಕ-

ಗಳನ್ನು (ಯ + ೧)(೨ಯ + ೫) ಎಂದು ಮಂಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು; ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ (ಯ + ೫)(೨ಯ + ೧) ಎಂದು ಮಂಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ಗ್ರಾಹ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗುಣಾಕಾರಮಾಡಿ ನೋಡುವಾ. ಮೊದಲನೆಯ ಜೋಡಿಯ ಗುಣಾಕಾರವು ೨ಯ^{೨} + ೭ಯ + ೫; ಎರಡನೆಯ ಜೋಡಿಯದು ೨ಯ^{೨} + ೧೧ಯ + ೫. ಅಂದಮೇಲೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವು (ಯ + ೫)(೨ಯ + ೧) ಎಂದಿರುವದು.

[ವಿ. ಸೂ.— ಅವಯುವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದ ಬಳಿಕ ಸಾಧ್ಯವೂ ಅನುಕೂಲವೂ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಗುಣಿಸಿ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಬೇಕು.]

೬.೫. ಇದರಂತೆಯೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ೬ಯ^{೨}−೧೧ಯ+೩ ಈ ಎರಡನೆಯದೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ೬ಯ^{೨} ಇದರಲ್ಲಿ ಯ ವರ್ಣವುಳ್ಳ ಅವಯುವಗಳು ಯ, ೬ಯ ಮತ್ತು ೨ಯ, ೩ಯ ಇವೇ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಇರುವದು ಶಕ್ಯವಿರುವದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳು (ಯ....) (೬ಯ....) ಅಥವಾ (೨ಯ....) (೩ಯ....) ಈ ಸ್ವರೂಪದವಿರಬೇಕು. ಮತ್ತು ೩ ರ ಅವಯುವಗಳು ೧ ಮತ್ತು ೩ ಇವೇ ಇರುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ೩ ರ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು + ಇದ್ದು ನಡುವಿನ ಪದವು **ಋಣ**ವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ −೧ ಮತ್ತು −೩ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವವು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಗುಣಕಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುವವು:

(ಯ−೧)(೬ಯ−೩); (ಯ−೩)(೬ಯ−೧); (೨ಯ−೧)(೩ಯ−೩); (೨ಯ−೩)(೩ಯ−೧).

ಇನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದು ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಸಂಭವಿಸಲಾರವು. ಕಾರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಅವೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡನೆಯ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ೩ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ. ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಾದ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲೇ ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆರಡೂ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಅಗ್ರಾಹ್ಯವಿರುವವು. ಇನ್ನು ಉಳಿದವು ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕಾರಗಳು. ಎರಡನೆಯ ಜೋಡಿಯ ಗುಣಾಕಾರವು ೬ಯು^{೨} − ೧೯ಯು + ೩ ಆಗುವದು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಜೋಡಿಯದು ೬ಯು^{೨}−೧೧ಯು + ೩ ಆಗುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ
೬ಯು^{೨} − ೧೧ಯು + ೩ ≡ (೨ಯು − ೩)(೩ಯು − ೧).

೭.೬. ೧೦ಯು^{೨} + ೧೧ಯು − ೬ ಈ ಮತ್ತೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ೧೦ಯು^{೨}ದ ಶಕ್ಯವಿರುವ ಅವಯವಗಳು ಯು ಮತ್ತು ೧೦ಯು, ಅಥವಾ ೨ಯು ಮತ್ತು ೫ಯು ಇವೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಕಗಳು (ಯು....)(೧೦ಯು....) ಅಥವಾ (೨ಯು....)(೫ಯು....) ಈ ಸ್ವರೂಪದವಿರುವವು. ಇನ್ನು ನಾವು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದ (− ೬ ರ) ವಿಚಾರಮಾಡುವಾ. ೬ ರ ಅವಯವ-ಗಳು ೧ ಮತ್ತು ೬, ಅಥವಾ ೨ ಮತ್ತು ೩ ಹೀಗೆ ಇರುವವು. ೬ ರ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು − ಇರುವದರಿಂದ ಅದರ ಒಂದು ಅವಯವದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು + ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಅವಯವದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು − ಇರುವದು. ಈಗ ನಾವು ೧ ಮತ್ತು ೬ ಈ ಜೋಡಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ೬ ಇದು ೧೦ಯು ಅಥವಾ ೨ಯು ಈ ಜೋಡಿಯೊಡನೆ ಇರಲಾರದು. ಇದ್ದರೆ ೨ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಾಗುವದು, ಆದರೆ ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳಿಗೆ ಇಂಥ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ ೨ ಮತ್ತು ೩ ಈ ಜೋಡಿಯ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ೨ ಇದು ೧೦ಯು ಅಥವಾ ೨ಯು ಇವುಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಇರಲಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ ರಾಶಿಯ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದ ಗುಣಕಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ:

(ಯು+೬)(೧೦ಯು−೧); (ಯು−೬)(೧೦ಯು+೧); (ಯು+೨)(೧೦ಯು−೩);
(ಯು−೨)(೧೦ಯು+೩); (೨ಯು−೧)(೫ಯು+೬); (೨ಯು+೧)(೫ಯು−೬);
(೨ಯು+೩)(೫ಯು−೨); (೨ಯು−೩)(೫ಯು+೨).

ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಜೋಡಿಯು ಇಷ್ಟವಿದೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುವದು. ಆದರೆ ಈ ಎಂಟೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಕಾರಣವೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಮೊದಲನೆಯ ಪದವು ೧೦ಯು^{೨} ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದವು − ೬ ಇದ್ದೇ ಇರುವದು.

ನಡುವಿನ ಪದದ್ದಷ್ಟೇ ಪ್ರಶ್ನೆ; ಯಾವ ಜೋಡಿಯು ಬೇಕಾದದ್ದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಡುವಿನ ಪದದ ಮೇಲಿಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸುವದಿದೆ. (ಯ+೬)(೧೦ಯ−೧)ದಂಥ ದ್ವಿಪದ ಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಯ ತ್ರಿಪದ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದವನ್ನು ಹೇಳುವದು ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ಮಾತಾಗಿದೆ. ಹೊರಗಿನ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಒಳಗಿನ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಇದೇ ನಡುವಿನ ಪದ. ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಹೊರಪದಗಳ (+ಯ ಮತ್ತು −೧ ಇವುಗಳ) ಗುಣಾಕಾರವು −ಯ, ಒಳಪದಗಳ (+೬ ಮತ್ತು +೧೦ಯ ಇವುಗಳ) ಗುಣಾಕಾರವು +೬೦ಯ, ಮತ್ತು ಆ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು +೫೯ಯ. ಇದರಂತೆಯೇ ಉಳಿದ ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿ ಅವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ −೫೯ಯ, +೧೭ಯ, −೧೭ಯ, +೭ಯ, −೭ಯ, +೧೧ಯ ಮತ್ತು −೧೧ಯ, ಹೀಗೆ ಬರುವವು. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದವು+೧೧ಯ ಇದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ (೨ಯ+೩)(೫ಯ−೨) ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವು.

೭·೭. ಪಯ^{೨} **+ ಬಯ + ನ** ಈ ತರಹದ ತ್ರಿಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ನೋಡಿದ ರೀತಿಯಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ (**ಪ. ೭·೪**) ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ (**ಪ. ೭·೫**) ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಬಹು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬಂದಿತು. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ನಮಗೆ ಆ ರೀತಿಯು ಅಷ್ಟೊಂದು ಅನುಕೂಲವಲ್ಲೆಂದೆನಿಸುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಬಹುಶಃ ಅದು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇಸರಿಕೆಯದೆನಿಸಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂಥ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲವಾದ ಮಾರ್ಗವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ಯತ್ನಿಸುವಾ. ಆದರೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ನಮಗೆ ಈ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವ ರೂಢಿಯಾಗಬೇಕೆಂದು ಮುಂದಿನ ಸಂಗ್ರಹದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡುವಾ. ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾರಂಭಿಸಿದ ತರುವಾಯ ನಮಗೆ ಈ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದೆಂಬುದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೬.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. ೨ಯ^2 − ೭ಯ + ೬.
೨. ೨ಯ^2 − ೯ಯ + ೪.
೩. ೬ಯ^2 + ೧೭ಯ + ೫.
೪. ೧೨ರ^2 − ೨೩ರ + ೧೦.
೫. ೬ಯ^2 + ಯ − ೧.
೬. ೧೬ರ^2 − ೨೬ರ + ೩.
೭. ೨ವ^2 + ೩ವ − ೧೪.
೮. ಕ್ಷ^2 − ೭ಕ್ಷ − ೮.
೯. ೮ಯ^2 − ೨೬ಯ − ೭.
೧೦. ೧೫ಮ^2 + ೭ವ − ೨.
೧೧. ೧೪ಪ^2 − ೧೯ಪ − ೩.
೧೨. ೨೨ನ^2 + ೩೭ನ + ೬.
೧೩. ೧೮ಸ^2 − ೧೫ಸ + ೨.
೧೪. ೭ಮ^2 + ೩೨ಮ − ೧೫.
೧೫. ೧೦ಪ^2 + ೨೧ಪ − ೧೦.
೧೬. ೧೨ದ^2 − ೫ದ − ೨.
೧೭. ೯ರ^2 − ೧೧ರ + ೨.
೧೮. ೨೨ಯ^2 − ೭೭ಯ + ೩೩.
೧೯. ೨೪ಪ^3 + ೮ಪ^2 − ೧೦ಪ.
೨೦. ೪೨ಅ^3 − ೯೧ಅ^2 + ೪೨ಅ.
೨೧. ೯ಪ^4 − ೪೨ಪ^3 − ೧೫ಪ^2.

೭·೮. ಇನ್ನು ನಾವು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲವಾದ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವಾ. ಕೆಳಗೆ **ಅಯ + ಕ** ಈ ಸ್ವರೂಪದ **ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಗಳ** ನಾಲ್ಕು ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ನಡುವಿನ ಹಂತಗಳೊಡನೆ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾ, ಮತ್ತು ಏನು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

(೪ಯ+೫)(೨ಯ+೭) ≡ ೨ಯ(೪ಯ + ೫) + ೭(೪ಯ + ೫) ೧
[≡ ೪.೨ಯ^2+೫.೨ಯ+೪.೭ಯ+೫.೭]. ೨ಅ*
≡ ೮ಯ^2 + ೧೦ಯ + ೨೮ಯ + ೩೫ . ....೨ಆ
≡ ೮ಯ^2 + ೩೮ಯ + ೩೫ . ....೩

(೩ಯ−೭)(೫ಯ−೨) ≡ ೫ಯ(೩ಯ − ೭) − ೨(೩ಯ − ೭) ೧
[≡ ೩.೫ಯ^2−೭.೫ಯ−೩.೨ಯ+೭.೨]. ೨ಅ*
≡ ೧೫ಯ^2 − ೩೫ಯ − ೬ಯ + ೧೪ ....೨ಆ
≡ ೧೫ಯ^2 − ೪೧ಯ + ೧೪ .... ೩

(೬ಯ−೧೧)(೭ಯ+೩) ≡ ೭ಯ(೬ಯ−೧೧)+೩(೬ಯ−೧೧) ೧

[≡ ೬.೭ಯ^{೨}−೧೧.೭ಯ+೬.೩ಯ−೧೧.೩ ....೨ಅ*

≡ ೪೨ಯ^{೨}−೭೭ಯ+೧೮ಯ−೩೩ ....೨ಬ

≡ ೪೨ಯ^{೨} − ೫೯ಯ − ೩೩ ....೩

(೮ಯ+೯)(೩ಯ−೨) ≡ ೩ಯ (೮ಯ + ೯) − ೨(೮ಯ + ೯).... ....೧

[≡ ೮.೩ಯ^{೨}+೯.೩ಯ−೮.೨ಯ−೯.೨].... ....೨ಅ*

≡ ೨೪ಯ^{೨} + ೨೭ಯ − ೧೬ಯ − ೧೮.... .... ೨ಬ

≡ ೨೪ಯ^{೨} + ೧೧ಯ − ೧೮ .... ೩

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮತ್ತು **ಗುಣಾಕಾರ** ಇವು **ಪರಸ್ಪರ** ವಿರುದ್ಧವಾದ **ಕ್ರಿಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.** ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಯಾವ ಹಂತಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೋಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅವೇ ಹಂತಗಳಿಂದ, ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಿಂದ ನಮಗೆ **ಗುಣಾಕಾರ-ರಾಶಿಯ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು** ಮಾಡುವಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾಗುವದು. ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ೨ಅ ಮತ್ತು ೨ಬ ಈ ಹಂತ-ಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾದ ಯಾವ-ದಾದರೂ ಸಂಗತಿಯು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬರುವದೇ? ಈ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಕಡೆಗೆ – ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯ ದ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಕಡೆಗೆ – ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಡಿರಿ, ಮತ್ತು' ಮೊದಲನೆಯ ಪದ (ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಯ^{೨} ದ ಸಹಗುಣಕ) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ, ಇವುಗಳತ್ತ ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಡಿರಿ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವು ಕಂಡು-ಬರುವದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ವಿಚಾರಕ್ಕೆ ಗತಿ ದೊರೆಯಬೇಕೆಂದು ಮತ್ತೂ ಒಂದು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುವಾ. ಇನ್ನು ಗುಣಾ-ಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ **ಅಯ+ಕ** ಮತ್ತು **ಇಯ+ಗ** ಈ ದ್ವಿಪದಿ-

* ಕ್ರ.೨ಅ ಈ ಹಂತಗಳು ಅನವಶ್ಯಕವಾದವುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕೆಂತಲೇ ಅವುಗಳನ್ನು ಚೌಕ ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಿಂದೆ ಇಂಥ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಹಂತವನ್ನು ನಾವೆಂದಿಗೂ ಬರೆದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಬರೆಯುವದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಉದ್ದೇಶವಿದೆ.

ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ವಿಚಾರ-ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ **ದ್ವಿಪದಿ**ಗಳ ಸಮಾವೇಶವಾಗುವದು.

(ಅಯ+ಕ)(ಇಯ+ಗ) ≡ ಇಯ(ಅಯ+ಕ)+ಗ(ಅಯ+ಕ) ……೧

≡ ಅಇಯ^{೨}+ಇಕಯ+ಅಗಯ+ಕಗ ……೨

≡ ಅಇಯ^{೨}+(ಇಕ+ಅಗ)ಯ+ಕಗ ……೩

ಇಲ್ಲಿಯೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಕ್ರ.೨ ಈ ಹಂತದೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕೂ ಪದ-ಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವಾ. ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು, (ವಿಶೇಷವಾಗಿ **ಯ** ದ ಸಹಗುಣಕಗಳು), ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ (ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಯ^{೨} ದ ಸಹಗುಣಕವು) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದುದು ತೋರಿಬರುವದೇ? ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾ-ಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಎಷ್ಟು ಇರುವದು? **ಅಇಕಗಯ**^{೨}. ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಎಷ್ಟಿರುವದು? **ಅಇಕಗಯ**^{೨}. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯು ಮೊದಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವದೇನೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾ: ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ. ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ.

೧ನೆಯ. ೪.೭ಯ×೫.೨ಯ =೨೮೦ಯ^{೨} ೪.೨ಯ^{೨}×೫.೭=೨೮೦ಯ^{೨}

೨ನೆಯ. ೩.೨ಯ×(−೭.೫ಯ) =೨೧೦ಯ^{೨} ೩.೫ಯ^{೨}×೭.೨=೨೧೦ಯ^{೨}

೩ನೆಯ. ೬.೩ಯ×(−೧೧.೭ಯ)=−೧೩೮೬ಯ^{೨}

೬.೭ಯ^{೨}×(−೧೧.೩) = −೧೩೮೬ಯ^{೨}

೪ನೆಯ. −೮.೨ಯ×೯.೩ಯ=−೪೩೨ಯ^{೨}; ೮.೩ಯ^{೨}×(−೯.೨)=−೪೩೨ಯ^{೨}

ಮೇಲೆ ನಾವು ನಡುವಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ (ಅಥವಾ **ಯ** ದ ಸಹಗುಣಕ-ಗಳ) ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ(ಅಥವಾ **ಯ**^{೨}ದ ಸಹಗುಣಕ) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇವು ಸರಿ ಇರುವವೆಂದು ಸೂಚಿಸಿದ ಸಂಗತಿಯು ಸತ್ಯತೆಯು ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವ-ದಿಲ್ಲವೇ? ಇನ್ನು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದ-ಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಗುಣಾ-ಕಾರ ಮಾಡುವಾಗ ನಾವು ಹೋಗಬೇಕಾದ ಹಂತಗಳ ಮೇಲಿಂದ, ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಿಂದ, ನಾವು ಗುಣಾಕಾರ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು

ಮಾಡುವಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾಗುವದು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಿಚ್ಚಳವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ **ಅಇಯ**^{2} + (**ಇಕ** + **ಅಗ**)**ಯ** + **ಕಗ** ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ನಮಗೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತ-ಗಳಿಂದ ಹೋಗಬೇಕಾಗುವದು.

ಅಇಯ^2+(**ಇಕ**+**ಅಗ**)**ಯ**+**ಕಗ** ≡ **ಅಇಯ**^{2}+**ಇಕಯ**+**ಅಗಯ**+**ಕಗ**

≡ **ಇಯ**(**ಅಯ**+**ಕ**) + **ಗ**(**ಅಯ**+**ಕ**)

≡ (**ಅಯ**+**ಕ**)(**ಇಯ**+**ಗ**)

ಇನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ (**ಯ** ದ) ಸಹ ಗುಣಕವು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಇದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ **ಇಕಯ** ಮತ್ತು **ಅಗಯ** ಎಂದು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳೊಂದಿಗೆ ಗುಂಪು ಮಾಡಿ ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಎರಡೆರಡು ಪದಗಳ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಅವಯವ-ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ **ಯ** ದ ಸಹಗುಣಕವು ವಿಭಾಗಿಸಿದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಂಥ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬಂದಿರುವ ಸಂಗತಿಯೇನಂದರೆ **ಪಯ**^{2}+ **ಬಯ** + **ಮ** ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದದ (**ಬಯ** ದ) ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕು. ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು (**ಪಮ ಯ**^{2} ದಷ್ಟು) ಇದ್ದರೆ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಪದದೊಡನೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕೊನೆಯ ಪದದೊಡನೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ವಿಶೇಷ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಈ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಮತ್ತು **ಪೆ. ೭**·೩ ರಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಗುಣಾಕಾರ-ಗಳನ್ನು ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ, ಅಲ್ಲಿಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬರೆಯುವಾ, ಮತ್ತು ಇದೇ ನಿಯಮವು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

೮ಯ^{೨} + ೩೮ಯ + ೩೫

≡ ೮ಯ^{೨}+೧೦ಯ+೨೮ಯ+೩೫ (+೧೦)(+೨೮) = +೨೮೦;

≡ ೨ಯ(೪ಯ+೫)+೭(೪ಯ+೫) (+೮)(+೩೫) = +೨೮೦.

≡ (೪ಯ+೫)(೨ಯ+೭).

೧೫ಯ^{೨} − ೪೧ಯ + ೧೪

≡ ೧೫ಯ^{೨}−೩೫ಯ−೬ಯ+೧೪ (−೩೫)(−೬) = +೨೧೦;

≡ ೫ಯ(೩ಯ−೭)−೨(೩ಯ−೭) (+೧೫)(+೧೪) = +೨೧೦.

≡ (೩ಯ−೭)(೫ಯ−೨).

೪೨ಯ^{೨}−೫೯ಯ−೩೩

≡ ೪೨ಯ^{೨}−೭೭ಯ+೧೮ಯ−೩೩ (−೭೭)(+೧೮)=−೧೩೮೬;

≡ ೭ಯ(೬ಯ−೧೧)+೩(೬ಯ−೧೧) (+೪೨)(−೩೩)=−೧೩೮೬.

≡ (೬ಯ−೧೧)(೭ಯ+೩).

೨೪ಯ^{೨} + ೧೧ಯ − ೧೮

≡ ೨೪ಯ^{೨}+೨೭ಯ−೧೬ಯ−೧೮ (+೨೭)(−೧೬)=−೪೩೨;

≡ ೩ಯ(೮ಯ+೯)−೨(೮ಯ+೯) (+೨೪)(−೧೮)=−೪೩೨.

≡ (೮ಯ+೯)(೩ಯ−೨).

೬ಯ^{೨} + ೨೩ಯ + ೨೦

≡ ೬ಯ^{೨}+೧೫ಯ+೮ಯ+೨೦ (+೧೫)(+೮)=+೧೨೦;

≡ ೩ಯ(೨ಯ+೫)+೪(೨ಯ+೫) (+೬)(+೨೦)=+೧೨೦.

≡ (೨ಯ+೫)(೩ಯ+೪).

೨೪ಯ^{೨} − ೬೧ಯ + ೩೫

≡ ೨೪ಯ^{೨}−೪೦ಯ−೨೧ಯ+೩೫ (−೪೦)(−೨೧)=+೮೪೦;

≡ ೮ಯ(೩ಯ−೫)−೭(೩ಯ−೫) (+೨೪)(+೩೫)=+೮೪೦.

≡ (೩ಯ−೫)(೮ಯ−೭).

೧೪ಯ^{೨} + ೫೭ಯ − ೨೭

≡ ೧೪ಯ^{೨}−೬ಯ+೬೩ಯ−೨೭ (−೬)(+೬೩)=−೩೭೮;

≡ ೨ಯ(೭ಯ−೩)+೯(೭ಯ−೩) (+೧೪)(−೨೭)=−೩೭೮;

≡ (೭ಯ−೩)(೨ಯ+೯).

೧೨ಯ^{೨} − ೧೧ಯ − ೫ .

≡ ೧೨ಯ^{೨} − ೧೫ಯ + ೪ಯ − ೫   (−೧೫)(+೪) = −೬೦;

≡ ೩ಯ(೪ಯ − ೫) + (೪ಯ − ೫)   (+೧೨)(−೫) = −೬೦.

≡ (೪ಯ − ೫)(೩ಯ + ೧).

೭·೯. ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಎಂಟೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದು **ಪ ೭·೮** ಮತ್ತು **೭·೩.** ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಬೇರೆ ಯಾವದಾದರೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುವಂಥ ನಡುವಿನ ಪದದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದೇ? ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ **ಪ. ೭·೬** ರಲ್ಲಿಯ ೧೦ಯ^{೨} + ೧೧ಯ − ೬ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನೇ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ೧೦ ಮತ್ತು −೬ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು − ೬೦. ಇನ್ನು ಯಾವ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು − ೬೦ ಆಗುವದೋ ಅಂಥ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ೧೧ರಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದೇ? ಗುಣಾಕಾರವು − ೬೦ ಇರಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಭಾಗವು **ಧನ** ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗವು **ಋಣ** ಇದ್ದಿರಬೇಕು, ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಿಚ್ಚಳವಿದೆ. ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಹೇಳುವದೇನೆಂದರೆ ನಮ್ಮೆದುರಿಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಹೀಗೆ: **ಗುಣಾಕಾರವು − ೬೦ ಮತ್ತು ಬೇರೀಜು + ೧೧ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವವು?** ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ +೧೫ ಮತ್ತು −೪ ಇವೇ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ + ೧೫ಯ ಮತ್ತು −೪ಯ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ನಾವು ಮಾಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ.

ಇಷ್ಟು ತಿಳಿದ ತರುವಾಯ ಇನ್ನು ನಾವು ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವಾ.

೧೦ಯ^{೨} + ೧೧ಯ − ೬ ≡ ೧೦ಯ^{೨} + ೧೫ಯ − ೪ಯ − ೬

≡ ೫ಯ (೨ಯ + ೩) − ೨·(೨ಯ + ೩)

≡ (೨ಯ + ೩) (೫ಯ − ೨).

ಪ. ೭·೬ ರಲ್ಲಿ ಇವೇ ಅವಯವಗಳನ್ನು ನಾವು ಸಂಭವನೀಯವಾದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು **ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ** (ಅವು ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬು-

ದನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ **ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ**—ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ ನಾವು **ಪರೀಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿ** ಎನ್ನುವಾ) ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆದಿರುವೆವು. ಆ ಪದ್ಧತಿಗಿಂತ ಈಗಿನ ಈ ಪದ್ಧತಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವೂ ಅನುಕೂಲವೂ ಇಲ್ಲವೇ?

ಪ. ೭·೪ ಮತ್ತು **೭**·೫ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ $೨ಯ^{೨} + ೧೧ಯ + ೫$ ಮತ್ತು $೬ಯ^{೨} - ೧೧ಯ + ೩$ ಈ ರಾಶಿಗಳಿಗೂ ನಾವು ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಹಚ್ಚಿ ನೋಡುವಾ. $೨ಯ^{೨} + ೧೧ಯ + ೫$. ೨ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೦. ೧೧ ರಲ್ಲಿ ೧೦ ಮತ್ತು ೧ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ ೧೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$೨ಯ^{೨} + ೧೧ಯ + ೫ \equiv ೨ಯ^{೨} + ೧೦ಯ + ಯ + ೫$$
$$\equiv ೨ಯ(ಯ + ೫) + (ಯ + ೫)$$
$$\equiv (ಯ + ೫)(೨ಯ + ೧).$$

$೬ಯ^{೨} - ೧೧ಯ + ೩$. ೬ ಮತ್ತು ೩ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೮. -೧೧ ರಲ್ಲಿ -೯ ಮತ್ತು -೨ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು $+೧೮$ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$೬ಯ^{೨} - ೧೧ಯ + ೩ \equiv ೬ಯ^{೨} - ೯ಯ - ೨ಯ + ೩$$
$$\equiv ೩ಯ(೨ಯ - ೩) - (೨ಯ - ೩)$$
$$\equiv (೨ಯ - ೩)(೩ಯ - ೧).$$

೭·೧೦. ಇನ್ನು ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗಿನ ವಿವೇಚನೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧವು ಬಂದಿರದಂಥ ಕೆಲವು ಹೊಸ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಅವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಉ. ೧. $೧೫ಯ^{೨} + ೩೧ಯ + ೧೦$. ೧೫ ಮತ್ತು ೧೦ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೫೦. ೩೧ ರಲ್ಲಿ ೨೫ ಮತ್ತು ೬ ಹೀಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ ೧೫೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$೧೫ಯ^{೨} + ೩೧ಯ + ೧೦ \equiv ೧೫ಯ^{೨} + ೨೫ಯ + ೬ಯ + ೧೦$$
$$\equiv ೫ಯ(೩ಯ + ೫) + ೨(೩ಯ + ೫)$$
$$\equiv (೩ಯ + ೫)(೫ಯ + ೨).$$

ಉ. ೨. ೩೨ರ^{೨} − ೪೪ರ + ೧೫. +೩೨ ಮತ್ತು +೧೫ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು +೪೮೦. −೪೪ ರಲ್ಲಿ −೨೪ ಮತ್ತು −೨೦ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ +೪೮೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

೩೨ರ^{೨} − ೪೪ರ + ೧೫ ≡ ೩೨ರ^{೨} − ೨೪ರ − ೨೦ರ + ೧೫
≡ ೮ರ (೪ರ − ೩) − ೫ (೪ರ − ೩)
≡ (೪ರ − ೩) (೮ರ − ೫).

ಉ. ೩. ೧೮ವ^{೨} + ೪೧ವ − ೧೦. ೧೮ ಮತ್ತು −೧೦ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು −೧೮೦. +೪೧ ರಲ್ಲಿ +೪೫ ಮತ್ತು −೪ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ −೧೮೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

೧೮ವ^{೨} + ೪೧ವ − ೧೦ ≡ ೧೮ವ^{೨} + ೪೫ವ − ೪ವ − ೧೦
≡ ೯ವ(೨ವ + ೫) − ೨(೨ವ + ೫)
≡ (೨ವ + ೫) (೯ವ − ೨).

ಉ. ೪. ೨೪ಕ್ಷ^{೨} − ೨ಕ್ಷ − ೧೫. ೨೪ ಮತ್ತು −೧೫ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು −೩೬೦. −೨ರಲ್ಲಿ −೨೦ ಮತ್ತು +೧೮ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೂ −೩೬೦ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

೨೪ಕ್ಷ^{೨} − ೨ಕ್ಷ − ೧೫ ≡ ೨೪ಕ್ಷ^{೨} − ೨೦ಕ್ಷ + ೧೮ಕ್ಷ − ೧೫
≡ ೪ಕ್ಷ(೬ಕ್ಷ − ೫) + ೩(೬ಕ್ಷ − ೫)
≡ (೬ಕ್ಷ − ೫) (೪ಕ್ಷ + ೩).

೭.೧೧. ಉ. ೫. ೩೫ಯ^{೨} + ೭೬ಯ + ೩೩. ೩೫ ಮತ್ತು ೩೩ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೫೫. ಇನ್ನು ನಮ್ಮೆದುರಿಗೆ ಬರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯೆಂದರೆ ೭೬ರಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೫೫ ಆಗುವಂಥ ಯಾವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿರುವವು? ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಶಬ್ದಗಳಲ್ಲಿ, **ಬೇರೀಜು ೭೬ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೫೫ ಆಗುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವವು?** ವೇಳೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೇ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ನಾವು ಉತ್ತರ ಕೊಡಬಲ್ಲೆವಾದರೆ ಒಳ್ಳೆಯದು, ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಮುಂದಿನ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುವದು ಯೋಗ್ಯವಾಗುವದು.

ಯ² ದ ಸಹಗುಣಕವಾದ ೩೫ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಅವು ಯಾವವು? ೧ ಮತ್ತು ೩೫, ಇಲ್ಲವೆ ೫ ಮತ್ತು ೭. ಕೊನೆಯ ಪದವಾದ ೩೩ರಲ್ಲಿ ಹೀಗೆಯೇ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಅವು ಯಾವವು ಇರಬಹುದು? ೧ ಮತ್ತು ೩೩, ಇಲ್ಲವೆ ೩ ಮತ್ತು ೧೧. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು:

ಯ + ೧	ಯ + ೩೩	ಯ + ೩	ಯ + ೧೧	೫ಯ + ೧	೫ಯ + ೩೩	೫ಯ + ೩	೫ಯ + ೧
×	×	×	×	×	×	×	×
೩೫ಯ+೩೩	೩೫ಯ+೧	೩೫ಯ+೧೧	೩೫ಯ+೩	೭ಯ+೩೩	೭ಯ+೧	೭ಯ+೧೧	೭ಯ+೩

ಇಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಪದವು ದೊರೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇಲ್ಲಿ ಏಳನೆಯ ಜೋಡಿಯು ಕೂಡುವದು ಎಂಬುದು ಸಹಜವಾಗಿ ಹೊಳೆಯುವದು. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ತರ್ಕಿಸಲು ಬರುವದು. ಯ² ದ ಸಹಗುಣಕದ ಅವಯವಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯನ್ನು ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಅದರ ಕೆಳಗೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಅವಯವಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಮೇಲಿನಂತೆ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಆ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ಬೇರೀಜು ಯ ದ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ ಆ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರಗಳೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಯ ದ ಸಹಗುಣಕದ ಭಾಗಗಳೆಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ವಿಶದ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

೧ ೩೫	೧ ೩೫	೧ ೩೫	೧ ೩೫	೫ ೭	೫ ೭	೫ ೭	೫ ೭
×	×	×	×	×	×	×	×
೧ ೩೩	೩೩ ೧	೩ ೧೧	೧೧ ೩	೧ ೩೩	೩೩ ೧	೩ ೧೧	೧೧ ೩

೩೩+೩೫ ೧+೧೧೫೫ ೧೧+೧೦೫ ೩+೩೮೫ ೧೬೫+೭ ೫+೨೩೧ ೫೫+೨೧=೭೬

ಇಲ್ಲಿ ಏಳನೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸರಿಬರುವದು. ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ

ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ೨೧ಯ ಮತ್ತು ೫೫ಯ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬರುವದು.

೩೫ಯ^{೨}+೨೧ಯ+೫೫ಯ+೩೩ ≡ ೭ಯ(೫ಯ+೩)+೧೧(೫ಯ+೩)
≡ (೫ಯ + ೩) (೭ಯ + ೧೧).

ಕೊನೆಯ ಪದದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು – ಇದ್ದರೆ (ಯ^{೨} ದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು – ಚಿನ್ಹವಲ್ಲ -ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಗೃಹೀತವೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.) ಅಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಯ ದ ಸಹಗುಣಕದಷ್ಟು ಇರುವದೋ ಅದು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಜೋಡಿ ಇರುವದು.

ಉ. ೬. ೧೫ಯ^{೨}+೪ಯ – ೯೧ ಈ ರಾಶಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡುವಾ. ೧೫ ರ ಅವಯವಗಳು ೧ ಮತ್ತು ೧೫ ಇಲ್ಲವೆ ೩ ಮತ್ತು ೫. ೯೧ ರ ಅವಯವಗಳು ೧ ಮತ್ತು ೯೧ ಇಲ್ಲವೆ ೭ ಮತ್ತು ೧೩. ಇನ್ನು ೧೫ ರ ಅವಯವಗಳ ಯಾವದೇ ಜೋಡಿಯೊಡನೆ ೯೧ ರ ಅವಯವಗಳ ಯಾವದೇ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಮುಂದಿನಂತೆ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ.

೧ ೧೫	೧ ೧೫	೧ ೧೫	೧ ೧೫	೩ ೫	೩ ೫	೩ ೫	೩ ೫
×	×	×	×	×	×	×	×
೧ ೯೧	೯೧ ೧	೭ ೧೩	೧೩ ೭	೧ ೯೧	೯೧ ೧	೭ ೧೩	೧೩ ೭

೯೧–೧೫ ೧೩೬೫–೧ ೧೦೫–೧೩ ೧೯೫–೭ ೨೭೩–೫ ೪೫೫–೩ ೩೯–೩೫=೪

ಇಲ್ಲಿ ಏಳನೇ ಗುಣಾಕಾರವು ಸರಿಹೋಗುವದು ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ **೪ಯ ದ** ಬದಲಾಗಿ ೩೯ಯ – ೩೫ಯ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕೆಂಬುದು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಬರುವದು.

೧೫ಯ^{೨} + ೪ಯ – ೯೧ ≡ ೧೫ಯ^{೨} + ೩೯ಯ – ೩೫ಯ – ೯೧
≡ ೩ಯ (೫ಯ + ೧೩) – ೭ (೫ಯ + ೧೩)
≡ (೫ಯ + ೧೩) (೩ಯ – ೭).

೭·೧೨. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಿಂದಲೂ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ **ಉ. ೫** ರಲ್ಲಿಯ **೩೫ಯ^{೨} + ೭೬ಯ + ೩೩** ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ಅನುಕೂಲವಿರುವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ-ದಕ್ಕಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ, ಬೇರೀಜು **೩೪** ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು ೩೫ × ೩೩ ಅಂದರೆ **೧೧೫೫** ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು **೧೧೫೫** ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಅವಿಭಾಜ್ಯ-ಅವಯವಗಳಲ್ಲಿ** ಬರೆಯುವಾ. **೧೧೫೫** = ೩. ೫. ೭. ೧೧. ಇಲ್ಲಿ **ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ** ಅವಯವವು ೧೧ ಇದೆ. ಇನ್ನು ನಾವು ಎರಡೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುವಾ. ಅವುಗಳ ಗುಣಾ-ಕಾರವು **೧೧೫೫** ಇರಬೇಕು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧, ೧೧ ಇಲ್ಲವೆ ೧೧ರ ಪಟ್ಟು ಇದ್ದು ಅದು ೧೧೫೫ನ್ನು ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಇಂಥ ಜೋಡಿಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವವು:—

೧ ೧೧೫೫
೧೧ ೧೦೫
೩೩ ೩೫
೫೫ ೨೧ **ಬೇರೀಜು ೩೪.** ಆದ್ದರಿಂದ **೫೫** ಮತ್ತು **೨೧** ಇವು ಆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಉ. ೬ ರಲ್ಲಿಯ ೧೫ಯ^2 + ೪ಯ − ೯೧ ಈ ರಾಶಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಹಿಂದೆ − ಚಿನ್ಹವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ **ಅಂತರವು** ೪ ಇದ್ದು **ಗುಣಾಕಾರವು** ೧೫ × ೯೧ ಅಂದರೆ **೧೩೬೫** ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯ-ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು **೧೩೬೫** = ೩. ೫. ೭. ೧೩. ಇಲ್ಲಿ **ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅವಯವವು** ೧೩ ಇರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನು ಗುಣಾಕಾರವು **೧೩೬೫** ಇದ್ದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧, ೧೩ ಇಲ್ಲವೇ ೧೩ ರ ಪಟ್ಟು ಇದ್ದು ೧೩೬೫ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವಂಥ ಎರಡೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವಾ.

೧ ೧೩೬೫
೧೩ ೧೦೫
೩೯ ೩೫ **ಅಂತರವು ೪.** ಆದ್ದರಿಂದ **೩೯** ಮತ್ತು **೩೫** ಇವು ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

೭·೧೩. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಬೇರೀಜು** ಮತ್ತು ಹಾಗೆಯೇ ಅವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರವು** ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವ ಒಂದು ಸುಲಭವಾದ ಮಾರ್ಗವಿದೆ. ಅದು ಹೀಗೆ: ಬೇರೀಜು ಅಷ್ಟೇ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಮಂಡಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ, ಅವುಗಳೊಳಗಿನ **ಅಂತರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಗುಣಾಕಾರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು** ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ **ಅಂತರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋಗುವದು.** ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಬೇರೀಜು ೧೨ ಇರುವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು-ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

೬ × ೬ = ೩೬	ಇಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜು ೧೨ ಇರುವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ
೫ × ೭ = ೩೫	ಅಂತರವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ ಗುಣಾ-
೪ × ೮ = ೩೨	ಕಾರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು ಮತ್ತು
೩ × ೯ = ೨೭	ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಿರುವಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು
೨ × ೧೦ = ೨೦	ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವದು, ಎಂದು ನಮಗೆ
೧ × ೧೧ = ೧೧	ಕಂಡುಬರುವದು.

ಇನ್ನು ವಿಷಮ ಬೇರೀಜು ಇರುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು-ಕೊಳ್ಳುವಾ. ಬೇರೀಜು ೯ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

೪ × ೫ = ೨೦	ಇಲ್ಲಿಯೂ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನ ಸಂಗತಿಯೇ ಕಂಡುಬರುವದು.
೩ × ೬ = ೧೮	ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ, ಅಂದರೆ ೧
೨ × ೭ = ೧೪	ಇದ್ದಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವದೆಂಬು-
೧ × ೮ = ೮	ದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಮ್ಮೆದುರಿನಲ್ಲಿ

ಎರಡೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆ-ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಮಗೆ ಈ ಸಂಗತಿಯು ನಿಜವಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹಾಗೆ ನಾವು ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಯಾವದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳ-ಲಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಅದು ಗ್ರಾಹ್ಯವೆಂದು ತಿಳಿಯಕೂಡದು.

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಸಂಗತಿಯು ನಿಜವಿದೆಯೆಂಬು-

ದನ್ನು ನಮಗೆ ಮುಂದಿನಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು. ಮೊದಲು ನಾವು ಸಮ ಬೇರೀಜಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೨ಅ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವವು.

$ಅ \times ಅ = ಅ^{೨}$

$(ಅ-೧)(ಅ+೧)=ಅ^{೨}-೧$

$(ಅ-೨)(ಅ+೨)=ಅ^{೨}-೪$

$(ಅ-೩)(ಅ+೩)=ಅ^{೨}-೯$

....

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಏನು ಕಂಡುಬರುವದು? ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾಸ (ಅ ಮತ್ತು ಅ) ಇದ್ದಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಂದರೆ $ಅ^{೨}$ ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅದು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು.

ಇನ್ನು ವಿಷಮ ಬೇರೀಜು ಇರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೨ಅ + ೧ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವವು.

$ಅ(ಅ+೧) = ಅ^{೨}+ಅ$

$(ಅ-೧)(ಅ+೨) = ಅ^{೨}+ಅ-೨$

$(ಅ-೨)(ಅ+೩) = ಅ^{೨}+ಅ-೬$

$(ಅ-೩)(ಅ+೪) = ಅ^{೨}+ಅ-೧೨$

....

ಇಲ್ಲಿಯೂ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆಯೆಂದರೆ ಬರೇ ೧ ಇದ್ದಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಅಂದರೆ $ಅ^{೨}+ಅ$ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಅಂತರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ ಅದು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು.

ಇದರ ಉಪಯೋಗವು ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಬೇರೀಜು** ಮತ್ತು **ಗುಣಾಕಾರ** ಇವೆರಡನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವದೋ ಅಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೇಗೆ ಆಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವಿನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನಾವು ಐದನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇರೀಜು ೭೬ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು

೧೧೫೫ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು ೪೦ ಮತ್ತು ೩೬ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೪೪೦ ಬರುವದು, ೫೦ ಮತ್ತು ೨೬ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ೧೩೦೦ ಬರುವದು, ೬೦ ಮತ್ತು ೧೬ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ೯೬೦ ಬರುವದು. ೫೬ ಮತ್ತು ೨೦ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೨೦ ಬರುವದು. (ಈ ಎಲ್ಲ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.) ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೧೫೫ ಇದೆ. ಅದರ ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆಯು ೫ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ೫೫ ಮತ್ತು ೨೧ ಇವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವದು ಬಹಳ ಸಂಭವನೀಯವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವೇ ಇರುವವೆಂಬುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ ನಾವು ಆರನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು +೪ ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು −೧೩೬೫ ಇದೆ. ಗುಣಾಕಾರವು **ಋಣ**ವಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು **ಧನ** ಇನ್ನೊಂದು **ಋಣ** ಇರುವದೆಂಬುದು ನಿಚ್ಚಳವಿದೆ. +೩೪ ಮತ್ತು −೩೦ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಗುಣಾಕಾರವು −೧೦೨೦ ಬರುವದು. +೪೪ ಮತ್ತು −೪೦ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ −೧೭೬೦ ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು −೧೩೬೫ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು +೩೪ ಮತ್ತು +೪೪, ಮತ್ತು −೩೦ ಮತ್ತು −೪೦ ಇವುಗಳ ಹತ್ತರ ಹತ್ತರ ನಟ್ಟನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಗುಣಾಕಾರದ ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆಯು ೫ ಇದೆ. +೩೯ ಮತ್ತು −೩೫ ಇವು ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವವೇ ಎಂದು ನೋಡುವಾ. ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಅವೇ ಇರುವವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ.

೭·೧೪. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಬೇರೀಜು (ಬ)** ಮತ್ತು ಅವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರವು (ಹಮ)** ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವ ಬಹಳ ಹತ್ತರದ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾದ ಒಂದು ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಈಗ ಹೇಳುವೆವು. ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದ ($\frac{1}{2}$**ಬ** ದ) ವರ್ಗವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಮತ್ತು ಅದರೊಳಗಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು (**ಹಮ**) ಕಳೆಯಬೇಕು. ಬರುವ

ಶೇಷದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದಲ್ಲಿ ($\frac{೧}{೨}$ಬ ದಲ್ಲಿ) ಕೂಡಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿ ಕಳೆಯಬೇಕು. ಬಂದ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಇವು ಆ ಎರಡು ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಈ ನಿಯಮದ ಉಪಯೋಗವು ನಮಗೆ **ಹಯ**^{೨} + **ಬಯ** + **ಮ** ದಂಥ **ತ್ರಿಪದಿಗಳ ನಡುವಿನ ಪದವನ್ನು** ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಒಡೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಬಹಳ ಒಳ್ಳೆ ರೀತಿಯಿಂದ ಆಗುವದು. ನಾವು ೪೮ಯ^{೨}+೬೪ಯ+೨೧ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು **ಬೇರೀಜು** ೬೪ ಮತ್ತು **ಗುಣಾಕಾರ** ೪೮ × ೨೧ ಅಂದರೆ ೧೦೦೮ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧವು ೩೨; ಅದರ ವರ್ಗವು ೧೦೨೪. ಅದರೊಳಗಿಂದ ಕಳೆಯಬೇಕಾದ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೦೦೮; ಶೇಷವು ೧೬. ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲವು ೪. ೩೨ + ೪ = ೩೬; ೩೨ − ೪ = ೨೮. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ೩೬ ಮತ್ತು ೨೮. ಇನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

೪೮ಯ^{೨} + ೬೪ಯ + ೨೧ ≡ ೪೮ಯ^{೨} + ೩೬ಯ + ೨೮ಯ + ೨೧
≡ ೧೨ಯ (೪ಯ + ೩) + ೭ (೪ಯ + ೩)
≡ (೪ಯ + ೩) (೧೨ಯ + ೭).

ಇದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ೪೦ಯ^{೨} − ೯ಯ − ೧೦ ಈ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವಾ. $-\frac{೯}{೨}$ದ ವರ್ಗ $\frac{೮೧}{೪}$; ೪೦ ಮತ್ತು −೧೦ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ − ೪೦೦. $\frac{೮೧}{೪}$ ಉಣಾ − ೪೦೦ $= \frac{೧೬೮೧}{೪} = \left(\frac{೪೧}{೨}\right)^{೨}$. $-\frac{೯}{೨} + \frac{೪೧}{೨} = ೧೬$; $-\frac{೯}{೨} - \frac{೪೧}{೨} = -೨೫$.

೪೦ಯ^{೨} − ೯ಯ − ೧೦ ≡ ೪೦ಯ^{೨} + ೧೬ಯ − ೨೫ಯ − ೧೦
≡ ೮ಯ (೫ಯ + ೨) − ೫ (೫ಯ + ೨)
≡ (೫ಯ + ೨) (೮ಯ − ೫).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೭.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ :

೧. ೨ಯ^{೨} + ೫ಯ + ೩.

೨. ೩ಯ^{೨} + ೪ಯ + ೧.

೩. ೬ರ² + ೧೩ರ + ೬.
೪. ೬ವ² + ೧೭ವ + ೫.
೫. ೬ಲ² − ೫ಲ + ೧.
೬. ೬ರ² − ೧೩ರ + ೫.
೭. ೮ಪ² − ೧೮ಪ + ೯.
೮. ೬ಮ² − ೨೫ಮ + ೪.
೯. ೬ರ² − ೭ರ − ೩.
೧೦. ೮ಸ² + ೨ಸ − ೧.
೧೧. ೫ಯ² + ೯ಯ − ೨.
೧೨. ೨ಪ² − ೧೩ಪ − ೭.
೧೩. ೧೦ದ² − ೧೩ದ − ೩.
೧೪. ೬ಕ್ಷ² − ೧೧ಕ್ಷ + ೩.
೧೫. ೮ರ² − ೧೮ರ + ೯.
೧೬. ೮ಪ² − ೧೮ಪ − ೫.
೧೭. ೩ಯ² + ೨೩ಯ + ೩೦.
೧೮. ೧೫ನ² − ೭ನ − ೨.
೧೯. ೨ಬ² − ೧೫ಬ − ೮.
೨೦. ೧೨ಯ² + ೨೮ಯ + ೧೫.
೨೧. ೬ಯ² + ೭ಯ − ೩.
೨೨. ೪ಯ² + ೩೧ಯ + ೪೨.
೨೩. ೬ಯ² + ೧೭ಯ − ೧೦.
೨೪. ೧೦ಯ² − ೧೯ಯ + ೯.
೨೫. ೧೬ಪ² + ೪೬ಪ + ೧೫.
೨೬. ೪ಮ² + ೮ಮ − ೫.
೨೭. ೨೪ಯ² − ೨೫ಯ + ೬.
೨೮. ೧೦ರ² − ೯೧ರ + ೯.
೨೯. ೮ಯ² + ೨೭ಯ − ೨೦.
೩೦. ೨೪ರ² − ೩೮ರ + ೧೫.

೩.

ಯ² + ಬಯ + ಮ

೭·೧೫. **ಯ² + ಬಯ + ಮ** ಇದು **ಪಯ² + ಬಯ + ಮ** ದ ಪ = ೧ ಇರುವಂಥ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಕಾರವಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ **ಬೇರೀಜು** ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ (**ಯ** ದ) ಸಹಗುಣಕದಷ್ಟು (ಬ) ಇರುವ, ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು ಮೊದಲಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ (**ಯ²** ದ) ಸಹಗುಣಕ (೧) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ (ಮ) ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು (ಅಂದರೆ ಮ), ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅವಯವಗಳು (**ಯ....**)(**ಯ....**) ಈ ಸ್ವರೂಪದವು ಇರುವವು. ಮತ್ತು ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವವು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಯ²+೮ಯ+೧೫

ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ (ಯ+೩)(ಯ+೫) ಇವು ಆ ಗುಣಕಗಳೆಂದು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೮ ಇದೆ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು ೧೫ ಇದೆ. ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ತೋರಿಸಿದ ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಯ^{೨} − ೧೦ಯ + ೨೪ ≡ (ಯ − ೪)(ಯ − ೬). (−೪) + (−೬) = − ೧೦ ;
(−೪)(−೬) = + ೨೪.

ರ^{೨} + ೫ರ − ೧೪ ≡ (ರ + ೭)(ರ − ೨). (+ ೭) + (− ೨) = + ೫ ;
(+೭)(−೨) = −೧೪.

ವ^{೨} − ೪ವ − ೨೧ ≡ (ವ − ೭)(ವ + ೩). (− ೭) + (+ ೩) = −೪ ;
(−೭)(+೩) = −೨೧.

ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದವು **ಧನ**ವಿದ್ದರೆ ಅವಯವಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು **ಏಕಚಿನ** ವಿರುವವು ಮತ್ತು ನಡುವಿನ ಪದದ ಚಿನ್ಹವೇ ಅವುಗಳ ಚಿನ್ಹವಿರುತ್ತದೆ. ಮೂಲರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದವು **ಋಣ**ವಿದ್ದರೆ ಅವಯವಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು **ಭಿನ್ನಚಿನ್ಹ**ವಿರುವವು.

ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ತರದ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಹಾಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕು. ಯಾವದಾದರೊಂದನ್ನು ಹಾಗೆ ಬಿಡಿಸಲು ಬರದಿದ್ದರೆ ಹಿಂದೆ ವಿಶದಪಡಿಸಿದ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಅನುಕೂಲವಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

ಉ. ೧. ಯ^{೨} + ೨೯ಯ + ೨೦೪. ಬೇರೀಜು ೨೯ ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು ೨೦೪ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವಾ. ೨೦೪ = ೨^{೨}.೩.೧೭. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅವಯವವು ೧೭. ೧ × ೨೦೪, ೧೭ × ೧೨, ಹೀಗೆ ೨೦೪ರ ಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾರಂಭಿಸಿದೊಡನೆಯೇ ೧೭ + ೧೨ = ೨೯ ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಯ^{೨} + ೨೯ಯ + ೨೦೪ ≡ ಯ^{೨} + ೧೨ಯ + ೧೭ಯ + ೨೦೪
≡ ಯ(ಯ + ೧೨) + ೧೭(ಯ + ೧೨)
≡ (ಯ + ೧೨)(ಯ + ೧೭).

ಉ. ೨. ರ² − ೩೪ರ + ೨೬೪. ಬೇರೀಜು ೩೪ ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು ೨೬೪ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವಾ. ೩೪ ರ ಅರ್ಧ ೧೭, ಅದರ ವರ್ಗವು ೨೮೯. ೨೮೯ − ೨೬೪ = ೨೫, ೨೫ ರ ವರ್ಗಮೂಲವು ೫. ೧೭ + ೫ ಅಂದರೆ ೨೨, ಮತ್ತು ೧೭ − ೫ ಅಂದರೆ ೧೨ ಇವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ರ² − ೩೪ರ + ೨೬೪ ≡ ರ² − ೧೨ರ − ೨೨ರ + ೨೬೪
≡ ರ (ರ − ೧೨) − ೨೨ (ರ − ೧೨)
≡ (ರ − ೧೨)(ರ − ೨೨).

ಉ. ೩. ವ² − ೧೨ವ − ೧೦೫೩. ಕೊನೆಯ ಪದದ ಹಿಂದಿನ ಚಿನ್ಹವು −ಇದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು ೧೦೫೩ ಇದ್ದು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ೧೨ ಇರುವಂಥ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ೧೦೫೩ = ೩⁴ × ೧೩. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಯವವು ೧೩. ೧ × ೧೦೫೩, ೧೩ × ೮೧, ೩೯ × ೨೭ ಹೀಗೆ ಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದೊಡನೆಯೇ ೩೯ − ೨೭ = ೧೨ ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ವ² − ೧೨ವ − ೧೦೫೩ ≡ ವ² + ೨೭ವ − ೩೯ವ − ೧೦೫೩
≡ ವ (ವ + ೨೭) − ೩೯ (ವ + ೨೭)
≡ (ವ + ೨೭)(ವ − ೩೯).

ಉ. ೪. ಅ⁴ಯ⁴−೧೨ಅ²ಯ²−೪೫
≡ ಅ⁴ಯ⁴+೩ಅ²ಯ²−೧೫ಅ²ಯ²−೪೫
≡ ಅ²ಯ²(ಅ²ಯ²+೩)−೧೫(ಅ²ಯ²+೩)
≡ (ಅ²ಯ²+೩)(ಅ²ಯ²−೧೫).

ಉ. ೫. ಯ² −೨೦ಯಕ್ಷ− ೫೨೫ಕ್ಷ². ನಡುವಿನ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವು −೨೦. ಅದರ ಅರ್ಧ −೧೦. ಅದರ ವರ್ಗ ೧೦೦. ೧೦೦−(−೫೨೫)=೬೨೫. ಇದರ ವರ್ಗ ಮೂಲವು ೨೫. − ೧೦ + ೨೫ = ೧೫; − ೧೦ − ೨೫ = − ೩೫. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$ಯ^{೨}-೨೦ಯಕ್ಷ-೫೨೫ಕ್ಷ^{೨} \equiv ಯ^{೨}+೧೫ಯಕ್ಷ-೩೫ಯಕ್ಷ-೫೨೫ಕ್ಷ^{೨}$$
$$\equiv ಯ(ಯ+೧೫ಕ್ಷ) - ೩೫ಕ್ಷ(ಯ+೧೫ಕ್ಷ)$$
$$\equiv (ಯ+೧೫ಕ್ಷ)(ಯ-೩೫ಕ್ಷ)$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೮.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. $ಯ^{೨}+೭ಯ+೧೦$. ೨. $ರ^{೨}+೧೪ರ+೪೫$. ೩. $ವ^{೨}+೧೩ವ+೪೦$.
೪. $ಲ^{೨}+೧೦ಲ+೨೧$. ೫. $ಸ^{೨}+೧೨ಸ+೩೫$. ೬. $ಕ್ಷ^{೨}-೭ಕ್ಷ+೧೦$.
೭. $ಮ^{೨}-೮ಮ+೧೫$. ೮. $ನ^{೨}-೧೬ನ+೩೯$. ೯. $ಯ^{೨}-೧೦ಯ+೧೬$.
೧೦. $ಯ^{೨}-೨೦ಯ+೭೫$. ೧೧. $ಯ^{೨}-೫ಯ-೨೪$. ೧೨. $ರ^{೨}-೯ರ+೧೮$.
೧೩. $ಮ^{೨}-೧೬ಮ+೩೯$ ೧೪. $ನ^{೨}-೩ನ-೧೩೦$. ೧೫. $ಪ^{೨}+ಪ-೫೬$.
೧೬. $ವ^{೨}+೨ವ-೮೦$. ೧೭. $ಬ^{೨}+೫ಬ-೨೪$. ೧೮. $ರ^{೨}+೧೦ರ-೫೬$.
೧೯. $ರ^{೨}-೯ರ-೧೩೬$. ೨೦. $ಯ^{೨}-೨೦ಯ-೧೨೫$.
೨೧. $ನ^{೨}-ನ-೧೧೦$. ೨೨. $ತ^{೨}+೨೦ತ-೬೯$. ೨೩. $ದ^{೨}+೨೮ದ+೯೬$.
೨೪. $ಕ^{೨}+೧೭ಕ+೫೨$. ೨೫. $ಅ^{೨}-೨೫ಅ+೧೫೬$.
೨೬. $ಗ^{೨}-೧೯ಗ-೯೨$. ೨೭. $ರ^{೨}-೧೫ರ-೨೫೦$. ೨೮. $ವ^{೨}-೨೪ವ-೮೧$.
೨೯. $ಪ^{೨}-೩೦ಪ+೨೦೦$. ೩೦. $ಮ^{೨}+೬ಮ-೨೧೬$.
೩೧. $ರ^{೨}-೬ರ-೯೧$. ೩೨. $ಯ^{೨}+೨ಯ-೩೫$. ೩೩. $ಸ^{೨}+೨೩ಸ+೧೩೨$.
೩೪. $ಯ^{೨}+ಯ-೨೭೨$. ೩೫. $ಯ^{೨}-ಯ-೩೮೦$. ೩೬. $ರ^{೨}-೧೬ರ-೭೨೦$.
೩೭. $ಕ್ಷ^{೨}-೧೧ಕ್ಷ+೨೪$. ೩೮. $ಅ^{೨}-೨ಅ-೧೫೨೦$. ೩೯. $ಪ^{೨}-೧೧ಪ-೮೦$.
೪೦. $ಯ^{೨}+೩೦ಯ+೧೭೬$. ೪೧. $ಅ^{೨}ಯ^{೨}+೧೩ಅಯ+೪೦$.
೪೨. $ಕ^{೨}ಯ^{೨}-೧೧ಕಯ+೨೮$. ೪೩. $ಯ^{೨}-೫ಯಕ್ಷ+೬ಕ್ಷ^{೨}$.
೪೪. $ಯ^{೨}+೫ಯಕ್ಷ-೧೪ಕ್ಷ^{೨}$. ೪೫. $ಪ^{೨}-೩ಪಬ-೧೮ಬ^{೨}$.
೪೬. $ಯ^{೪}+೫ಬ^{೨}ಯ^{೨}+೬ಬ^{೪}$. ೪೭. $ಯ^{೬}-೮ಬ^{೩}ಯ^{೩}-೪೮ಬ^{೬}$.
೪೮. $ಅ^{೪}ಯ^{೪}-೩ಅ^{೨}ಕ^{೨}ಯ^{೨}-೧೮ಕ^{೪}$.
೪೯. $ಪ^{೪}ಯ^{೬}+ಪ^{೨}ಮ^{೨}ಯ^{೩}ಕ್ಷ^{೩}-೨೦ಮ^{೪}ಕ್ಷ^{೬}$.

೪.

೭·೧೬. ಪಯ^2 + ಬಯ + ಮ ಈ ಸ್ವರೂಪದ **ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿಗಳ** ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಸುಲಭವಾದ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶದಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉ. ೧. ೧೪ಯ^2 + ಯ − ೩೦ ≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೧೪}}$(೧೯೬ಯ^2 + ೧೪ಯ − ೪೨೦)
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೧೪}}$ { (೧೪ಯ)^2 + ೧೪ಯ − ೪೨೦ }
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೧೪}}$(**ರ**^{2} + **ರ** − ೪೨೦)....೧೪ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿ
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೧೪}}$(**ರ** + ೨೧)(**ರ** − ೨೦)
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೧೪}}$(೧೪ಯ + ೨೧)(೧೪ಯ − ೨೦) .... **ರ** ದ ಬದಲಾಗಿ ೧೪ಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೧೪}}$×೭(೨ಯ + ೩)×೨(೭ಯ − ೧೦)
≡ (೨ಯ + ೩)(೭ಯ − ೧೦).

ತ್ರಿಪದಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ **ರ** ದಂಥ ಪ್ರತಿನಿಧಿ ವರ್ಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಪದಿಯನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ಅದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೨. ೫ಯ^2 − ೪೭ಯ + ೫೬ ≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೫}}$(೨೫ಯ^2 − ೫×೪೭ಯ + ೨೮೦)
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೫}}$(**ರ**^{2} − **೪೭ರ** + ೨೮೦)....೫ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ **ರ** ತೆಗೆದುಕೊಂಡು
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೫}}$(**ರ** − ೪೦)(**ರ** − ೭)
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೫}}$(೫ಯ − ೪೦)(೫ಯ − ೭).... **ರ** ದ ಬದಲಾಗಿ ೫ಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ
≡ $\frac{\text{೧}}{\text{೫}}$×೫(ಯ − ೮)(೫ಯ − ೭)
≡ (ಯ − ೮)(೫ಯ − ೭).

ಉ. ೩. $೧೫ಯ^{೨} - ೧೧ಯ - ೧೪ \equiv \frac{೧}{೧೫}(೨೨೫ಯ^{೨} - ೧೫\times೧೧ಯ - ೨೧೦)$

$\equiv \frac{೧}{೧೫}(ರ^{೨} - ೧೧ರ - ೨೧೦)$....೧೫ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು

$\equiv \frac{೧}{೧೫}(ರ - ೨೧)(ರ + ೧೦)$

$\equiv \frac{೧}{೧೫}(೧೫ಯ - ೨೧)(೧೫ಯ + ೧೦)$.... ರ ದ ಬದಲಾಗಿ ೧೫ಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ

$\equiv \frac{೧}{೧೫}\times ೩(೫ಯ - ೭)\times ೫(೩ಯ + ೨)$

$\equiv (೫ಯ - ೭)(೩ಯ + ೨)$.

ಉ. ೪. $೨೧ಯ^{೨} - ೩೪ಯ - ೩೫$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}(೪೪೧ಯ^{೨} - ೨೧\times೩೪ಯ - ೭೩೫)$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}(ರ^{೨} - ೩೪ರ - ೭೩೫)$....೨೧ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು

$\equiv \frac{೧}{೨೧}(ರ - ೪೯)(ರ + ೧೫)$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}(೨೧ಯ - ೪೯)(೨೧ಯ + ೧೫)$ ರ ದ ಬದಲಾಗಿ ೨೧ಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ

$\equiv \frac{೧}{೨೧}\times ೭(೩ಯ - ೭)\times ೩(೭ಯ + ೫)$

$\equiv (೩ಯ - ೭)(೭ಯ + ೫)$.

ಮೇಲಿನ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತವನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರಿ.

$೨೧ಯ^{೨} - ೩೪ಯ - ೩೫$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}(೪೪೧ಯ^{೨} - ೨೧\times೩೪ಯ - ೭೩೫)$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}\{(೨೧ಯ)^{೨} - ೨\times೧೭\times೨೧ಯ + (೧೭)^{೨} - (೧೭)^{೨} - ೭೩೫\}$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}\{(೨೧ಯ - ೧೭)^{೨} - ೨೮೯ - ೭೩೫\}$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}\{(೨೧ಯ - ೧೭)^{೨} - ೧೦೨೪\}$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}\{(೨೧ಯ - ೧೭)^{೨} - (೩೨)^{೨}\}$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}(೨೧ಯ - ೧೭ - ೩೨)(೨೧ಯ - ೧೭ + ೩೨)$

$\equiv \frac{೧}{೨೧}(೨೧ಯ - ೪೯)(೨೧ಯ + ೧೫)$

$\equiv (೩ಯ - ೭)(೭ಯ - ೫)$.

ತ್ರಿಪದಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದವನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂಡಿಸಿ ತರುವಾಯ ಆ ತ್ರಿಪದಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವಂಥ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆಯೂ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

$$೨೧ಯ^{೨}-೩೪ಯ-೩೫ \equiv ೨೧\left(ಯ^{೨}-\frac{೩೪}{೨೧}ಯ-\frac{೩೫}{೨೧}\right)$$
$$\equiv ೨೧\left\{\left(ಯ-\frac{೧೭}{೨೧}\right)^{೨}-\left(\frac{೧೭}{೨೧}\right)^{೨}-\frac{೩೫}{೨೧}\right\}$$
$$\equiv ೨೧\left\{\left(ಯ-\frac{೧೭}{೨೧}\right)^{೨}-\frac{೧೦೨೪}{೪೪೧}\right\}$$
$$\equiv ೨೧\left\{\left(ಯ-\frac{೧೭}{೨೧}\right)^{೨}-\left(\frac{೩೨}{೨೧}\right)^{೨}\right\}$$
$$\equiv ೨೧\left(ಯ-\frac{೧೭}{೨೧}-\frac{೩೨}{೨೧}\right)\left(ಯ-\frac{೧೭}{೨೧}+\frac{೩೨}{೨೧}\right)$$
$$\equiv ೨೧\left(ಯ-\frac{೪೯}{೨೧}\right)\left(ಯ+\frac{೧೫}{೨೧}\right)$$
$$\equiv ೩\times೭\left(ಯ-\frac{೭}{೩}\right)\left(ಯ+\frac{೫}{೭}\right)$$
$$\equiv (೩ಯ-೭)(೭ಯ+೫).$$

ಉ. ೭·೧೪ ರಲ್ಲಿಯ $೪೮ಯ^{೨}+೬೪ಯ+೨೧$ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಮೂರೂ ರೀತಿಗಳಿಂದ ತೆಗೆಯುವಾ. $೪೮ಯ^{೨}$ ವನ್ನು ೩ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಾಕಾರವು $೧೪೪ಯ^{೨}$ ಬರುವದು. ಮತ್ತು ಇದು ೧೨ಯ ದ ವರ್ಗವಿರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$೪೮ಯ^{೨}+೬೪ಯ+೨೧ \equiv \frac{೧}{೩}(೧೪೪ಯ^{೨}+೧೯೨ಯ+೬೩)$$
$$\equiv \frac{೧}{೩}\left\{(೧೨ಯ)^{೨}+೧೬\times೧೨ಯ+೬೩\right\}$$
$$\equiv \frac{೧}{೩}(ರ^{೨}+೧೬ರ+೬೩)$$ ....೧೨ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ **ರ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿ
$$\equiv \frac{೧}{೩}(ರ+೯)(ರ+೭)$$
$$\equiv \frac{೧}{೩}(೧೨ಯ+೯)(೧೨ಯ+೭)$$ ....ರ ದ ಬದಲಾಗಿ ೧೨ಯ ಬರೆಯಲಾಗಿ
$$\equiv \frac{೧}{೩}\times೩(೪ಯ+೩)(೧೨ಯ+೭)$$
$$\equiv (೪ಯ+೩)(೧೨ಯ+೭).$$

ಇಲ್ಲವೆ,
$$೪೮ಯ^೨+೬೪ಯ+೨೧ \equiv \frac{೧}{೩}(೧೪೪ಯ^೨+೧೯೨ಯ+೬೩)$$
$$\equiv \frac{೧}{೩}\left\{(೧೨ಯ)^೨+೨\cdot೮\cdot೧೨ಯ+(೮)^೨-೧\right\}$$
$$\equiv \frac{೧}{೩}\left\{(೧೨ಯ+೮)^೨-೧\right\}$$
$$\equiv \frac{೧}{೩}(೧೨ಯ+೮+೧)(೧೨ಯ+೮-೧)$$
$$\equiv \frac{೧}{೩}(೧೨ಯ+೯)(೧೨ಯ+೭)$$
$$\equiv \frac{೧}{೩}\times೩(೪ಯ+೩)(೧೨ಯ+೭)$$
$$\equiv (೪ಯ+೩)(೧೨ಯ+೭).$$

ಇಲ್ಲವೆ,
$$೪೮ಯ^೨+೬೪ಯ+೨೧ \equiv ೪೮\left(ಯ^೨+\frac{೪}{೩}ಯ+\frac{೭}{೧೬}\right)$$
$$\equiv ೪೮\left\{\left(ಯ+\frac{೨}{೩}\right)^೨-\frac{೪}{೯}+\frac{೭}{೧೬}\right\}$$
$$\equiv ೪೮\left\{\left(ಯ+\frac{೨}{೩}\right)^೨-\frac{೬೪-೬೩}{೧೪೪}\right\}$$
$$\equiv ೪೮\left\{\left(ಯ+\frac{೨}{೩}\right)^೨-\frac{೧}{೧೪೪}\right\}$$
$$\equiv ೪೮\left\{\left(ಯ+\frac{೨}{೩}+\frac{೧}{೧೨}\right)\left(ಯ+\frac{೨}{೩}-\frac{೧}{೧೨}\right)\right\}$$
$$\equiv ೪೮\left(ಯ+\frac{೯}{೧೨}\right)\left(ಯ+\frac{೭}{೧೨}\right)$$
$$\equiv ೪\times೧೨\times\left(ಯ+\frac{೩}{೪}\right)\left(ಯ+\frac{೭}{೧೨}\right)$$
$$\equiv (೪ಯ+೩)(೧೨ಯ+೭).$$

$ಪಯ^೨+ಬಯ+ಮ$ ಈ ತರದ ತ್ರಿಪದಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಹೇತುವೆಂದರೆ ನಮಗೆ ಬಹಳಷ್ಟು ರೀತಿಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಯಾವದು ಯಾವಾಗ ಸುಲಭವೆನಿಸುವದೋ ಅದನ್ನು ಆಗ ನಮಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರ-ಬೇಕು. ಇದಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಜಿಜ್ಞಾಸೆಯುಳ್ಳ ಅಭ್ಯಾಸಿಗಳೆದುರಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾರಿಗೆ ಯಾವದು ಸೇರುತ್ತದೆಯೋ ಮತ್ತು ಸುಲಭವೆನಿಸುತ್ತ-ದೆಯೋ ಅದನ್ನು ಅವರು ಅರಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಯತ್ನಿಸುವರು. ಇಂಥ ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಹಲವರಿಗೆ ಕಠಿಣವೆನಿಸುತ್ತದೆಂದು ಅನುಭವವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯದ ವಿಸ್ತೃತವಾದ ಚರ್ಚೆ-ಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಆ ಗಡಚುತನವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ.

೭·೧೭. ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ವರ್ಗತ್ರಿಪದಿಗಳು **($ಯ^೨ \pm ೨ಅಯ + ಅ^೨$)** ಮತ್ತು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ **($ಯ^೨ - ಅ^೨$)** ಇವು **$ಪಯ^೨+ಬಯ+ಮ$** ಈ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ದ್ವಿಘಾತ ತ್ರಿಪದಿಯದೇ ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ರೂಪಗಳಿರುವವೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು.

$ಯ^{೨}+೨ಅಯ+ಅ^{೨}$ ಇದರಲ್ಲಿ **ಪ**$=೧$, **ಬ**$=೨ಅ$, ಮತ್ತು **ಮ**$=ಅ^{೨}$. ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕವು ಅ ಮತ್ತು ಅ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದವು ಅ ಮತ್ತು ಅ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $ಯ^{೨}-೨ಅಯ+ಅ^{೨}$ ಇದರಲ್ಲಿ **ಪ**$=೧$, **ಬ**$=-೨ಅ$, ಮತ್ತು **ಮ**$=ಅ^{೨}$. ಇಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕವು $-ಅ$ ಮತ್ತು $-ಅ$ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದ್ದು ಕೊನೆಯ ಪದವು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿರುತ್ತದೆ.

$ಯ^{೨}-ಅ^{೨}$ ಇದರಲ್ಲಿ **ಪ**$=೧$, **ಬ**$=೦$, ಮತ್ತು **ಮ**$=-ಅ^{೨}$. ಇಲ್ಲಿ **ಯ** ದ ಸಹಗುಣಕವು $-ಅ$ ಮತ್ತು $+ಅ$ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದ್ದು ಕೊನೆಯ ಪದವು $-ಅ$ ಮತ್ತು $+ಅ$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವಿರುತ್ತದೆ.

೭·೧೮. $-೧೨ಯ^{೨}+೧೧ಯ+೧೫$ ಇಲ್ಲವೆ $-೮ಯ^{೨}+೩೪ಯ-೨೧$, ಇಂಥ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಹಲವು ಸಾರೆ ಅವುಗಳನ್ನು $೧೨ಯ^{೨}-೧೧ಯ-೧೫$ ಮತ್ತು $೮ಯ^{೨}-೩೪ಯ+೨೧$ ಹೀಗೆ ಮೊದಲು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ನಿತ್ಯಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡಿ ಕೊನೆಗೆ $(೪ಯ+೩)(೩ಯ-೫)$ ಮತ್ತು $(೪ಯ-೩)(೨ಯ-೭)$ ಎಂದು ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ತಪ್ಪು. ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ ಗುಣಾಕಾರವು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಕೆಳಗೆ ಮಂಡಿಸಿದ್ದರ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯವಿತ್ತರೆ ತಪ್ಪು ಎಲ್ಲಿ ಆಗುವದೆಂಬುದು ಕಂಡು ಬರುವದು.

$-೧೨ಯ^{೨}+೧೧ಯ+೧೫$	$-೮ಯ^{೨}+೩೪ಯ-೨೧$
$=-(೧೨ಯ^{೨}-೧೧ಯ-೧೫)$	$=-(೮ಯ^{೨}-೩೪ಯ+೨೧)$
$=-(೧೨ಯ^{೨}+೯ಯ-೨೦ಯ-೧೫)$	$=-(೮ಯ^{೨}-೬ಯ-೨೮ಯ+೨೧)$
$=-\{೩ಯ(೪ಯ+೩)-೫(೪ಯ+೩)\}$	$=-\{೨ಯ(೪ಯ-೩)-೭(೪ಯ-೩)\}$
$=-(೪ಯ+೩)(೩ಯ-೫)$	$=-(೪ಯ-೩)(೨ಯ-೭)$
$=(೪ಯ+೩)(-೩ಯ+೫)$	$=(೪ಯ-೩)(-೨ಯ+೭)$
$=(೪ಯ+೩)(೫-೩ಯ)$.	$=(೪ಯ-೩)(೭-೨ಯ)$.

ಆದರೆ ಹೀಗೆ ಚಿನ್ಹಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯೇ ಎಲ್ಲಿದೆ? – ೧೨ಯ^{೨} + ೧೧ಯ + ೧೫. ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜು ೧೧ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು –೧೮೦ ಇರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವಾ. ೨೦ ಮತ್ತು –೯ ಇವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ,

–೧೨ಯ^{೨} + ೧೧ಯ+೧೫ ≡ – ೧೨ಯ^{೨} – ೯ಯ + ೨೦ಯ + ೧೫
≡ – ೩ಯ(೪ಯ + ೩) + ೫ (೪ಯ + ೩)
≡(೪ಯ + ೩)(೫ – ೩ಯ).

ಹಾಗೆಯೇ, – ೮ಯ^{೨} + ೩೪ಯ – ೨೧ ಇದರಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜು + ೩೪ ಇದ್ದು ಗುಣಾಕಾರವು + ೧೬೮ ಇರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿವೆ. ೬ ಮತ್ತು ೨೮ ಇವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಸಹಜವಾಗಿ ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

– ೮ಯ^{೨} + ೩೪ಯ – ೨೧ ≡ – ೮ಯ^{೨} + ೬ಯ + ೨೮ಯ – ೨೧
≡ – ೨ಯ (೪ಯ – ೩) + ೭ (೪ಯ – ೩)
≡ (೪ಯ – ೩)(೭ – ೨ಯ).

೭·೧೯. ೧೬ (ಯ + ವ)^{೨} + ೧೪ (ಯ + ವ) – ೧೫ ಇಲ್ಲವೆ ೬ (ಲ + ವ)^{೨} – (ಲ + ವ)(ರ + ಸ) – ೪೦ (ರ + ಸ)^{೨} ದಂಥ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಯ + ವ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಬರೆದರೆ,

ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯು = ೧೬ಅ^{೨} + ೧೪ಅ – ೧೫
= ೧೬ಅ^{೨} + ೨೪ಅ – ೧೦ಅ – ೧೫
= ೮ಅ (೨ಅ + ೩) – ೫ (೨ಅ + ೩)
= (೨ಅ +೩)(೮ಅ – ೫)
= (೨ಯ + ೨ವ + ೩)(೮ಯ + ೮ವ – ೫)........

ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಯ + ವ ಬರೆದು

ಲ + ವ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ ಮತ್ತು ರ + ಸ ದ ಬದಲಾಗಿ ಇ ಬರೆದರೆ,

ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯು = ೬ಅ^{2} − ಅಇ − ೪೦ಇ^{2}

= ೬ಅ^{2} + ೧೫ಅಇ − ೧೬ಅಇ − ೪೦ಇ^{2}

= ೩ಅ (೨ಅ + ೫ಇ) − ೮ಇ (೨ಅ + ೫ಇ)

= (೨ಅ + ೫ಇ)(೩ಅ − ೮ಇ)

= (೨ಲ + ೨ವ + ೫ರ + ೫ಸ)(೩ಲ + ೩ವ − ೮ರ − ೮ಸ)

ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಲ + ವ ಮತ್ತು ಇ ದ ಬದಲಾಗಿ ರ + ಸ ಬರೆದು

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೯.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:—

೧. ೧೫ಯ^{2} − ೧೯ಯ − ೧೦.

೨. ೩೨ರ^{2} − ೧೬ರ − ೬.

೩. ೬ವ^{2} − ೩ವ − ೬೩.

೪. ೧೦ಲ^{2} − ೭ಲ − ೩೩.

೫. ೫೬ಸ^{2} − ೬೦ಸ − ೩೬.

೬. ೫೦ಕ್ಷ^{2} + ೫ಕ್ಷ − ೬.

೭. (ಯ + ರ)^{2} + ೨ (ಯ + ರ) − ೩೫.

೮. (ಲ + ವ)^{2} − (ಲ + ವ) − ೭೨.

೯. ೨ (ರ + ಸ)^{2} + ೧೩ (ರ + ಸ) + ೧೫.

೧೦. ೬ (ಯ + ಕ್ಷ)^{2} − ೭ (ಯ + ಕ್ಷ) − ೨೦.

೧೧. ೧೬ (ಯ + ರ)^{2} + ೨ (ಯ + ರ) (ಲ + ವ) − ೩ (ಲ + ವ)^{2}.

೧೨. ೨ (ಪ + ಫ)^{2} + ೫ (ಪ + ಫ) (ಬ + ಮ) − ೨೫ (ಬ + ಮ)^{2}.

೧೩. ೬ (ಯ + ರ)^{2} − ೧೧ (ಯ + ರ) (ರ + ವ) + ೪ (ರ + ವ)^{2}.

೧೪. ೧೦ (ಯ + ವ)^{2} − (ಯ + ವ) (ವ + ಸ) − ೩ (ವ + ಸ)^{2}.

ಎಂಟನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ

೮·೧. ೬ರ ಗುಣಕಗಳು ೨ ಮತ್ತು ೩; ೧೦ರ ಗುಣಕಗಳು ೨ ಮತ್ತು ೫. ೨ ಇದು ೬ ಮತ್ತು ೧೦ ಇವುಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು.**

೨, ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವು ೩೦ರ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ೨, ೩ ಮತ್ತು ೭ ಇವು ೪೨ರ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ೨ ಮತ್ತು ೩ ಇವು ೩೦ ಹಾಗೂ ೪೨ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು.** ೨×೩ ಅಂದರೆ ೬ ಇದಾದರೂ ೩೦ ಮತ್ತು ೪೨ ಇವುಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು.**

೩, ೫ ಮತ್ತು ೭ ಇವು ೧೦೫ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ೩೦, ೪೨ ಮತ್ತು ೧೦೫ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು ೩. ಏಕಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ೩ ಇದೇ **ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು.**

ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವೆಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವೆಂದು** ಅದು ಇರುವದೋ ಅವುಗಳಿಗೆ ಅದು ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವದು. ೫ ರಿಂದ ೨೫ ಮತ್ತು ೩೫ ಇವೆರಡವುಗಳಿಗೂ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ೫ ಇದು ೨೫ ಮತ್ತು ೩೫ ಇವುಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು.** ೨೪ ಮತ್ತು ೩೬ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ೨, ೩, ೪, ೬ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದರಿಂದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨೪ ಮತ್ತು ೩೬ ಇವುಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು.** ಈ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕ-ಗಳಲ್ಲಿ ೧೨ ಇದು **ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವದು.** ಆದುದರಿಂದ ೧೨ ಇದು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ **ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು.** ಇದಕ್ಕೇ ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ **ದೃಢಭಾಜಕವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.** ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದಿಂದ ದೃಢಭಾಜಕವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ೪೫ ಮತ್ತು ೬೦ ಇವುಗಳ **ದೃಢಭಾಜಕವು** ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ನಾವು ಮೊದಲು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವೆವು.

೪೫ = ೩ × ೩ × ೫ ; ೬೦ = ೨ × ೨ × ೩ × ೫. ಇಲ್ಲಿ ೩ ಇದು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು,** ೫ ಇದು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವದು,** ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ೩ × ೫ ಅಂದರೆ ೧೫ ಇದು ಸಹ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕ-ವಿರುವದೆಂಬುದು** ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವದು. ಈಗ ಈ ಎಲ್ಲ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ೧೫ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಿರುವದು.** ಇದಕ್ಕೆ ನಾವು **ದೃಢಭಾಜಕವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.** ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಆ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು.

೮.೨. ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳದ್ದಾದರೂ ನಮಗೆ ಇದರಂತೆಯೇ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕ**ವನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಅಯ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಇದು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು** ಇರುವದು. ಅಕಯ ಮತ್ತು ಅಕಕ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಮತ್ತು ಕ ಇವು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕ**ಗಳಿರುವವು. ಅ × ಕ ಎಂದರೆ ಅಕ ಇದಾದರೂ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕ**ವಿರುವದು. ಮತ್ತು ಅದು **ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಿದೆ.** ಗುಣಕ ಎಂದರೆ ಯಾವ ರಾಶಿಯದು ಅದು ಗುಣಕವಿರುವದೋ ಆ ರಾಶಿಗೆ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸು-ವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಆದುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ **ವಿಭಾಜಕ** (ಯಾವುದರಿಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅಂದರೆ ಯಾವದು ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವದೋ) ಎಂದು ಸಹ **ಸಂಜ್ಞೆ** ಇರುವದು. **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕ**-ವೆಂದರೆ ಅದು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕ**ವಿರುವದೋ ಆ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವದು. ಅಂದರೆಯೇ ಅದು ಆ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ**ವಿರುವದು.

ಉ. ೧. ಪಬಯ, ಪಬಮ. ಪ, ಬ, ಮತ್ತು ಪಬ ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು. ಪಬ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದು.

ಉ. ೨. ಪ^{೨}ಬ^{೨}ಯ, ಪಬ^{೨}ರ. ಪ, ಬ, ಬ^{೨}, ಪಬ, ಪಬ^{೨} ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು. ಪಬ^{೨} ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದು.

ಉ. ೩. ೨ಪಬ^{೩}ಮ^{೨}ಯ, ೪ಪ^{೩}ಬ^{೨}ರ, ೬ಪ^{೪}ಬ^{೨}ಮವ. ೨, ಪ, ಬ, ಬ^{೨}, ಪಬ, ಪಬ^{೨}, ೨ಪ, ೨ಬ, ೨ಬ^{೨}, ೨ಪಬ, ೨ಪಬ^{೨} ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು. ೨ಪಬ^{೨} ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದು.

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ (**ವಿಭಾಜಕ-ಗಳಲ್ಲಿ**) ಯಾವ ಗುಣಕವು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಿರುವದೋ ಅದಕ್ಕೆ ನಾವು **ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ** ಎಂದೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮಹತ್ ಅಂದರೆ ದೊಡ್ಡದು, ಮತ್ತು ಮಹತ್ತಮ ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದು.

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $ಪಬ$, $ಪಬ^{೨}$ ಮತ್ತು $೨ಪಬ^{೨}$ ಇವು **ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ**ಗಳಿರುವವು. **ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ** ಈ ಸಂಜ್ಞೆಯನ್ನು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಈ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪದಿಂದ ನಾವು ಬರೆಯುವೆವು.

೮·೩. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಬರೆದಿರುವದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $ಪ^{೩}ಬ^{೪}ಮ^{೪}$, $ಪ^{೨}ಬ^{೪}ಮ^{೩}$, $ಪ^{೪}ಬ^{೫}ಮ^{೪}$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಹೇಳಿರಿ. ಪ, ಬ ಮತ್ತು ಮ ಇವುಗಳ ಘಾತಗಳು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವರ್ಣಗಳ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ. ಮೂರು ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವ ಪ ದ **ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತ** $ಪ^{೨}$ ಇರುವದು. ಬ ದ್ದು $ಬ^{೪}$ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಮ ದ್ದು $ಮ^{೩}$ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ $ಪ^{೨}ಬ^{೪}ಮ^{೩}$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮೂರೂ ರಾಶಿಗಳ ಕಡೆಗೆ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೀತಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ $ಪ^{೨}$, $ಬ^{೪}$ ಮತ್ತು $ಮ^{೩}$ ಇವು ಆ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಪ, ಬ ಮತ್ತು ಮ ಇವುಗಳ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಘಾತಗಳಿರುವವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಮತ್ತು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದಿರುವ ಘಾತವೇ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ದೊಡ್ಡ ಘಾತ-ವಿರುವದು.

ಉ. ೨. $ಪ^{೨}ಬ^{೩}ಮ^{೭}$, $ಬ^{೪}ಮ^{೫}$, $ಪಬ^{೩}ಮ^{೨}$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ ಪ ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಮೂರರಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವ ಬ ದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವು $ಬ^{೩}$ ಇದ್ದು ಮ ದ್ದು $ಮ^{೨}$ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ $ಬ^{೩}ಮ^{೨}$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೩. $೪ಅ^{೨}ಕ^{೩}ಯ^{೪}$, $೬ಅ^{೪}ಕಯ^{೩}$, $೧೨ಅ^{೩}ಕ^{೨}ಯ^{೨}$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಹೇಳಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ೪, ೬ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವು ಅಂಕಗುಣಕ-

ಗಳಿರುವವು. ಅವುಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು (ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು) ೨ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ೨ಅ^{೨}ಕಯ^{೨} ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೦

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. ೫ಅ; ೩ಅ^{೨}. ೨. ೪ಕ^{೨}; ೬ಕ^{೩}. ೩. ೮ಪ; ೧೨.

೪. ೮ಪ^{೨}; ೧೨ಪಬ. ೫. ೨೪ಅಇಕ; ೩೬ಪಬಮ. ೬. ಕಯ; ಕ^{೨}ಯ^{೩}.

೭. ಪರ^{೨}; ಪ^{೩}ರ^{೪}. ೮. ಗ^{೨}ಮ^{೪}; ಗ^{೪}ಮ^{೩}. ೯. ೨ಅಪ; ೨ಅಕ.

೧೦. ೪ಅಕಯ; ೬ಅಕಲ. ೧೧. ೨ಅಯ^{೪}; ೧೨ಅ^{೨}ಯ^{೩}.

೧೨. ೧೫ಅ^{೪}ರ^{೫}; ೨೦ಅ^{೩}ರ^{೨}. ೧೩. ೨೫ಅ^{೫}ಯ^{೨}ರ^{೩}; ೩೫ಅ^{೨}ಯರ^{೪}.

೧೪. ೧೨ಯ^{೪}ರ^{೩}ಲ^{೨}; ಯ^{೩}ರ^{೨}ಲ^{೪}; ೧೮ಯ^{೨}ರ^{೫}ಲ^{೩}.

೧೫. ೨೨ಕ^{೩}ಯ^{೪}ರ^{೨}; ೩೩ಗಯ^{೩}ರ^{೨}; ೫೫ಯ^{೫}ರ^{೪}.

೧೬. ೬ಪ^{೩}ಬ^{೨}ಮ^{೪}; ೮ಪ^{೨}ಬಮ^{೫}; ೧೬ಪ^{೪}ಬ^{೩}ಮ^{೫}.

೧೭. ೫ಅ^{೩}ಯ^{೨}ರ^{೪}; ೭ಅ^{೨}ಯ^{೩}ರ^{೫}; ೩ಅ^{೪}ಯರ^{೮}.

೧೮. ೧೬ಪ^{೩}ಬ^{೪}ಮ^{೬}; ೨೪ಪ^{೨}ಬ^{೩}ಮ^{೭}; ೩೬ಪ^{೪}ಬ^{೨}ಮ^{೪}.

೧೯. ೧೮ಪ^{೨}ಬಮ; ೨೪ಪಬಮ^{೨}; ೪೪ಪ^{೩}ಮ.

೨೦. ೩೦ಕ^{೪}ಗಷ^{೨}; ೧೮ಕ^{೩}ಗ^{೨}ಷ; ೨೫ಕ^{೨}ಗ.

೨೧. ೨೦ಯ^{೫}ರ^{೪}ಲ; ೧೫ಯ^{೪}ರ^{೫}ಲ^{೨}; ೧೦ಯ^{೨}ರ^{೩}ಲ.

೨೨. ೮ಯರ; ೧೨ರಲ; ೧೬ಲಯ.

೨೩. ೧೬ಯ^{೨}ರ^{೩}ಲ^{೪}; ೨೦ರ^{೨}ಲ^{೩}ಯ^{೪}; ೩೨ಲ^{೨}ಯ^{೩}ರ^{೪}.

೨೪. ೯ಅ^{೩}ಕ^{೩}ಗ^{೩}; ೨೭ಅ^{೨}ಕ^{೪}ಗ^{೩}; ೩೬ಅ^{೪}ಕ^{೩}ಗ.

೨೫. ೨೦ಕ್ಷ^{೪}; ೩೬ಅ^{೪}ಕ್ಷ^{೩}; ೪೫ಅಕ್ಷ^{೨}.

೨೬. ೨ಅ^{೨}ಕ^{೩}; ೬ಅ^{೩}ಕ^{೨}; ೧೬ಅ^{೪}ಕ.

೨೭. ೬ಕಯ^{೪}; ೧೮ಗಯ^{೩}ಕ್ಷ^{೨}; ೩೪ಷಯ^{೫}ಕ್ಷ.

೨೮. ೪ಅ^{೨}ಯ^{೩}ರ^{೨}; ೮ಅ^{೪}ಯ^{೨}ರ; ೧೭ಯ^{೪}ರ^{೨}.

೨೯. ೧೫ರ^{೩}ಲ^{೨}ವ; ೨೫ರ^{೪}ಲ^{೩}ವ^{೨}; ೧೦ಲ^{೪}ವ^{೨}.

೩೦. ಯ^{೭}; ೮ಯ^{೩}ರ^{೪}; ೯ಯ^{೪}ರಲ^{೨}.

೩೧. ೧೪ಅ^{೩}ಯ^{೫}ರ^{೨}ಸ^{೩}; ೩೫ಅ^{೨}ಯ^{೩}ರ^{೨}ಸ^{೫}; ೨೮ಅ^{೪}ಯ^{೨}ರಸ^{೪}.

೮.೪. ಅಂಕಗಣಿತದೊಳಗಿನ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದಿಂದ **ದೃಢಭಾಜಕ** ತೆಗೆಯುವ ರೀತಿ ಮತ್ತು ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯುವ ಈ ರೀತಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೇ ತರದ ಭೇದವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಅಂದರೆ ಮಾತ್ರ **ದೃಢಭಾಜಕವಲ್ಲ.** ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. $೫ಪಬ^{೨}$ ಮತ್ತು $೬ಪ^{೨}ಬ$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಪಬ ಇದು ಇರುತ್ತದೆ. $ಪ=೨$ ಮತ್ತು $ಬ=೩$ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ $೫ಪಬ^{೨}=೯೦$, ಮತ್ತು $೬ಪ^{೨}ಬ=೭೨$. ೯೦ ಮತ್ತು ೭೨ ಇವುಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ೧೮. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಪಬ ಇದೆ. ಮತ್ತು $ಪಬ=೬$. ಇದು ಹೀಗೆ ಆಗಲು ಒಂದು ಕಾರಣವಿದೆ. ಬೈಜಿಕ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಣಯುಕ್ತ ಗುಣಕಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತ ಮತ್ತು ಅಂಕಗುಣಕಗಳ ದೃಢಭಾಜಕ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದದ್ದಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅಂಕಿಕ ದೃಢಭಾಜಕವು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಗುಣಕವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುತ್ತದೆ. $೩ಅ^{೪}$ ಮತ್ತು $೧೦ಅ^{೨}$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** $ಅ^{೨}$ ಇರುವದು, ಆದರೆ $ಅ=೨$ ಎಂದುತಿಳಿದರೆ $೩ಅ^{೪}=೪೮$ ಮತ್ತು $೧೦ಅ^{೨}=೪೦$ ಆಗುವದು. ಮತ್ತು ಆಗ ದೃಢಭಾಜಕವು ೮ ಇರುವದು. ಆದರೆ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಆಗಿರುವ $ಅ^{೨}$ದ ಬೆಲೆಯು ೪ ಇದೆ. ಇದರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಅದು ಯಾವದೆಂದರೆ, ಅ, $ಅ^{೨}$, $ಅ^{೩}$, $ಅ^{೪}$.... ಈ ಅ ದ ಘಾತಗಳು ಏರುವ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ತೋರಿದರೂ ಅವುಗಳ **ಮಾನ** (ಬೆಲೆಯು) ಕ್ರಮವಾಗಿ ಏರುತ್ತಲೇ ಹೋಗುವದೆಂದಲ್ಲ. $ಅ>೧$ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಏರುತ್ತ ಹೋಗುವದು, $ಅ=೧$ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಸ್ಥಿರವಿರುವದು, ಮತ್ತು $ಅ<೧$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋಗುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $ಅ=\frac{೧}{೨}$ ಇದ್ದರೆ, $ಅ^{೨}=\frac{೧}{೪}$, $ಅ^{೩}=\frac{೧}{೮}$, $ಅ^{೪}=\frac{೧}{೧೬}$ .... ೩೨ಅ ಮತ್ತು $೪೮ಅ^{೨}$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ೧೬ಅ. ಆದರೆ $ಅ=\frac{೧}{೨}$ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, $೩೨ಅ=೧೬$ ಮತ್ತು $೪೮ಅ^{೨}=೧೨$. ೧೬ ಮತ್ತು ೧೨ ಇವುಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ೪. ಆದರೆ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಆಗಿರುವ ೧೬ಅ ಇದರ ಬೆಲೆಯು ೮. ಆದುದರಿಂದ ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ಮೂಲರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಗೆ ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಸರಿ ಇರುವದೆಂದಲ್ಲ. ಇರಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೆ ಇರದಿರಬಹುದು.

೮೫. ಈಗ ದ್ವಿಪದ, ತ್ರಿಪದ ಮತ್ತು ಬಹುಪದ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು** ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ೪ಅಯ + ೬ಅರ ಮತ್ತು ೮ಪಯ + ೧೨ಪರ ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪ಅಯ + ೬ಅರ = ೨ಅ (೨ಯ + ೩ರ),
ಮತ್ತು ೮ಪಯ + ೧೨ಪರ = ೪ಪ (೨ಯ + ೩ರ).
∴ ೨(೨ಯ + ೩ರ) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೨. ೧೬ಪಬಯ + ೪೦ಪಬರ, ೨೪ಪಮಯ + ೬೦ಪಮರ ಮತ್ತು ೬೪ಕಪಯ + ೧೬೦ಕಪರ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೬ಪಬಯ + ೪೦ಪಬರ = ೮ಪಬ (೨ಯ + ೫ರ),
೨೪ಪಮಯ + ೬೦ಪಮರ = ೧೨ಪಮ (೨ಯ + ೫ರ),
ಮತ್ತು ೬೪ ಕಪಯ + ೧೬೦ಕಪರ = ೩೨ಕಪ (೨ಯ + ೫ರ).
∴ ೪ಪ (೨ಯ + ೫ರ) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೩. ೪ಪ^{೩}ಬಮ + ೮ಪ^{೨}ಬ^{೨}ಮ − ೧೨ಪ^{೨}ಬಮ^{೨}, ೬ಪ^{೨}ಬ^{೨}ಮ + ೧೨ಪಬ^{೩}ಮ − ೧೮ಪಬ^{೨}ಮ^{೨} ಮತ್ತು ೮ಪ^{೨}ಬಮ^{೨} + ೧೬ಪಬ^{೨}ಮ^{೨} − ೨೪ಪಬಮ^{೩} ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪ಪ^{೩}ಬಮ + ೮ಪ^{೨}ಬ^{೨}ಮ − ೧೨ಪ^{೨}ಬಮ^{೨} = ೪ಪ^{೨}ಬಮ(ಪ + ೨ಬ − ೩ಮ),
೬ಪ^{೨}ಬ^{೨}ಮ + ೧೨ಪಬ^{೩}ಮ − ೧೮ಪಬ^{೨}ಮ^{೨} = ೬ಪಬ^{೨}ಮ(ಪ + ೨ಬ − ೩ಮ),
೮ಪ^{೨}ಬಮ^{೨} + ೧೬ಪಬ^{೨}ಮ^{೨} − ೨೪ಪಬಮ^{೩} = ೮ಪಬಮ^{೨}(ಪ + ೨ಬ − ೩ಮ).
∴ ೨ಪಬಮ (ಪ + ೨ಬ − ೩ಮ) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. ೪ಅಪ + ೮ಕಪ; ೬ಅಯ + ೧೨ಕಯ.

೨. ೯ಕಯ + ೧೨ಕರ; ೫ಕಮ + ೮ಕಸ.

೩. ೮ಪ² − ೪ಪಬ + ೧೨ಪಮ; ೪ಪಬ − ೨ಬ² + ೬ಬಮ;
೧೨ಪಮ − ೬ಬಮ + ೧೮ಮ².

೪. ೬ಯ²ರಲ + ೬ಯರ²ಲ − ೬ಯರಲ²; ೨೪ಯ²ರಲ − ೧೨ಯರ²ಲ
+ ೧೨ ಯರಲ²; ೯ಯ²ರಲ − ೨೭ಯರ²ಲ−೯ಯರಲ².

೫. ೪ಪಬ² + ೪ಪಬ − ೨೦ಪ; ೧೨ಕಬ² + ೧೨ಕಬ − ೬೦ಕ;
೧೬ಅ²ಬ² + ೧೬ಅ²ಬ − ೮೦ಅ².

೬. ೮ಅಪ + ೮ಅಬ + ೮ಅಮ; ೪ಕಪ + ೪ಕಬ + ೪ಕಮ;
೬ಪ + ೬ಬ + ೬ಮ.

೭. ೨೪ಅಪ − ೧೮ಅಮ; ೪೮ಕಮ − ೩೬ಕಮ; ೩೬ಪ − ೨೭ಮ.

೮. ೩೦ಅ − ೪೫ಕ + ೧೫ಗ; ೫೦ಅ − ೭೫ಕ + ೨೫ಗ; ೨೦ಅ−೩೦ಕ+೧೦ಗ.

೯. ೮ಯ² − ೪ಯರ; ೧೨ಯ³ − ೬ಯ²ರ; ೨೪ಗಯ² − ೧೨ಗಯರ;
೨೦ಕಯ³ − ೧೦ಕಯ²ರ.

೧೦. ೬ಕ²ಪ + ೬ಕಪ²; ೧೨ಕ³ಪ + ೧೨ಕ²ಪ²; ೯ಕ²ಪ² + ೯ಕಪ³;
೧೮ಕ³ಪ² + ೧೮ಕ²ಪ³.

೧೧. ೧೬ಅ²ಕ − ೮ಅಕ²; ೮ಅ² − ೪ಅಕ; ೨೦ಅ²ಕ² − ೧೦ಅಕ³;
೩೬ಅ³ಕ − ೧೮ಅ²ಕ².

೧೨. ೧೨ಪ+೨೪ಬ−೩೬ಮ; ೧೬ಪ−೮ಬ+೧೬ಮ; ೪೮ಪ−೪೮ಬ−೧೯ಮ.

೮·೬. ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ೮ಯ + ೮ರ ಮತ್ತು ಯ² − ರ² ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೮ಯ + ೮ರ ≡ ೮(ಯ + ರ)
ಯ² − ರ² ≡ (ಯ + ರ) (ಯ − ರ)

∴ ಯ + ರ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೨. ೪ಯ² − ೪ವ² ಮತ್ತು ೧೮ಯ³ + ೧೮ವ³ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪ಯ² − ೪ವ² ≡ ೪ (ಯ²−ವ²) ≡ ೪ (ಯ+ವ)(ಯ − ವ)
೧೮ಯ³+೧೮ವ³ ≡ ೧೮(ಯ³+ವ³) ≡ ೧೮(ಯ+ವ)(ಯ²−ಯವ+ವ²)
∴ ೨(ಯ + ವ) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೩. ೮ಯ^{೩} − ೮ವ^{೩} ಮತ್ತು ೧೨ಯ^{೪} + ೧೨ಯ^{೨}ವ^{೨} + ೧೨ವ^{೪} ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೮ಯ^{೩} − ೮ವ^{೩} ≡ ೮(ಯ^{೩} − ವ^{೩})

≡ ೮(ಯ − ವ)(ಯ^{೨} + ಯವ + ವ^{೨})

೧೨ಯ^{೪} + ೧೨ಯ^{೨}ವ^{೨} + ೧೨ವ^{೪}

≡ ೧೨(ಯ^{೪} + ಯ^{೨}ವ^{೨} + ವ^{೪})

≡ ೧೨(ಯ^{೨} + ಯವ + ವ^{೨})(ಯ − ಯವ + ವ^{೨})

∴ ೪(ಯ^{೨} + ಯವ + ವ^{೨}) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೪. ೧೫ಅಯ + ೧೮ಅರ + ೧೦ಕಯ + ೧೨ಕರ ಮತ್ತು ೫೦ಯ^{೨} + ೧೨೦ಯರ + ೭೨ರ^{೨} ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೫ಅಯ + ೧೮ಅರ + ೧೦ಕಯ + ೧೨ಕರ ≡ ೩ಅ(೫ಯ + ೬ರ) + ೨ಕ(೫ಯ + ೬ರ)

≡ (೫ಯ + ೬ರ)(೩ಅ + ೨ಕ)

೫೦ಯ^{೨} + ೧೨೦ಯರ + ೭೨ರ^{೨} ≡ ೨(೨೫ಯ^{೨} + ೬೦ಯರ + ೩೬ರ^{೨})

≡ ೨(೫ಯ + ೬ರ)^{೨}

∴ ೫ಯ + ೬ರ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೫. ೧೫೦ಪ^{೨} − ೫೪ಮ^{೨}, ೧೦೦ಪ^{೨} − ೧೨೦ಪಮ + ೩೬ಮ^{೨} ಮತ್ತು ೪೦ಪ^{೨} + ೧೬ಪಮ − ೨೪ಮ^{೨} ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೫೦ಪ^{೨} − ೫೪ಮ^{೨} ≡ ೬(೨೫ಪ^{೨} − ೯ಮ^{೨})

≡ ೬(೫ಪ + ೩ಮ)(೫ಪ − ೩ಮ)

೧೦೦ಪ^{೨} − ೧೨೦ಪಮ + ೩೬ಮ^{೨} ≡ ೪(೨೫ಪ^{೨} − ೩೦ಪಮ + ೯ಮ^{೨})

≡ ೪(೫ಪ − ೩ಮ)^{೨}

೪೦ಪ^{೨} + ೧೬ಪಮ − ೨೪ಮ^{೨} ≡ ೮(೫ಪ^{೨} + ೨ಪಮ − ೩ಮ^{೨})

≡ ೮(೫ಪ^{೨} + ೫ಪಮ − ೩ಪಮ − ೩ಮ^{೨})

≡ ೮ {೫ಪ(ಪ + ಮ) − ೩ಮ(ಪ + ಮ)}

≡ ೮(ಪ + ಮ)(೫ಪ − ೩ಮ)

∴ ೨(೫ಪ − ೩ಮ) ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೬. ೬ಅಪಯ^{೨} − ೨೪ಅಪಯರ + ೨೪ಅಪರ^{೨}, ೪ಯ^{೪} − ೩೨ಯ^{೨}ರ^{೨} + ೬೪ರ^{೪} ಮತ್ತು ೨ಯ^{೬} − ೩೨ಯ^{೩}ರ^{೩} + ೧೨೮ರ^{೬} ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$೬ಅಪಯ^{೨} - ೨೪ಆಪಯರ + ೨೪ಅಪರ^{೨} \equiv ೬ಆಪ(ಯ^{೨} - ೪ಯರ + ೪ರ^{೨})$$
$$\equiv ೬ಅಪ(ಯ - ೨ರ)^{೨}$$

$$೪ಯ^{೪} - ೩೨ಯ^{೨}ರ^{೨} + ೬೪ರ^{೪} \equiv ೪(ಯ^{೪} - ೮ಯ^{೨}ರ^{೨} + ೧೬ರ^{೪})$$
$$\equiv ೪(ಯ^{೨} - ೪ರ^{೨})^{೨}$$
$$\equiv ೪(ಯ + ೨ರ)^{೨}(ಯ - ೨ರ)^{೨}$$

$$೨ಯ^{೬} - ೩೨ಯ^{೩}ರ^{೩} + ೧೨೮ರ^{೬} \equiv ೨(ಯ^{೬} - ೧೬ಯ^{೩}ರ^{೩} + ೬೪ರ^{೬})$$
$$\equiv ೨(ಯ^{೩} - ೮ರ^{೩})^{೨}$$
$$\equiv ೨(ಯ - ೨ರ)^{೨}(ಯ^{೨} + ೨ಯರ + ೪ರ^{೨})^{೨}$$

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಕಗುಣಕಗಳ ದೃಢಭಾಜಕವು ೨ ಇದೆ, ಇದಲ್ಲದೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು $(ಯ - ೨ರ)^{೨}$ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ $೨(ಯ - ೨ರ)^{೨}$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುವದು.

೮·೭. ಇಲ್ಲಿಯ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯು ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ನಮಗೆ ಮೊದಲು ಆ ರಾಶಿಗಳ ಪೂರ್ಣ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕು. ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯುವ ಈ ರೀತಿಗೆ **ಗುಣಕ-ಪದ್ಧತಿ** ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ದೃಢಭಾಜಕ ತೆಗೆಯುವ ಬೇರೊಂದು ಪದ್ಧತಿಯೂ ಉಂಟು. ಆ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವೆವು. ಉಳಿಯುವ ಶೇಷದಿಂದ ಭಾಜಕವನ್ನು ಭಾಗಿಸುವೆವು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕ್ರಮಶಃ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ವರೆಗೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ದೃಢಭಾಜಕವು ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವದು. ಈ ರೀತಿಯಿಂದ ಬೈಜಿಕ-ರಾಶಿಗಳದ್ದಾದರೂ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ನಮಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಕಠಿಣವೆನಿಸಿದಾಗಷ್ಟೇ ಆ ರೀತಿಯನ್ನು ನಾವು ಅನುಸರಿಸುವೆವು. ಆ ರೀತಿಗೆ **ಭಾಗಾಕಾರ-ಪದ್ಧತಿ** ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಹುಡುಕಿ ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ ಮಾಡುವಾಗ ಆವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವುಗಳಿಗಿಂತ ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ

ಮಾಡಲು ಬರುವ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅವಯವಗಳು ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಇರುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವರ ಮೂಲಕ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುವ ಸೂಚನೆಯು ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. ಯ^{೨} + ೭ಯ + ೧೦; ಯ^{೨} + ೯ಯ + ೨೦.

೨. ಯ^{೨} − ೨ಯ − ೨೪; ಯ^{೨} + ೨ಯ − ೪೮.

೩. ಯ^{೨} + ೩ಯ − ೨೮; ಯ^{೨} − ೨ಯ − ೬೩.

೪. ಯ^{೨} − ೧೦ಯ + ೨೪; ಯ^{೨} − ೧೨ಯ + ೩೨.

೫. ೧೪ಪ^{೨} − ೧೪ಮ^{೨}; ೨೧ಪ^{೨} + ೩೫ಪಮ − ೫೬ಮ^{೨}.

೬. ೧೬ಅ^{೩} + ೫೪ಕ^{೩}; ೧೨ಅ^{೨} + ೩೬ಅಕ + ೨೭ಕ^{೨}.

೭. ೮ಅ^{೨} − ೮ಕ^{೨}; ೬ಅ^{೨} − ೧೨ಅಕ + ೬ಕ^{೨}; ೪ಅ^{೩} − ೪ಕ^{೩}.

೮. ೪ಪ^{೨} − ೧೨ಪಮ − ೭ಮ^{೨}; ೮ಪ^{೨} − ೨೨ಪಮ − ೨೧ಮ^{೨};
೧೦ಪ^{೨} − ೩೯ಪಮ + ೧೪ಮ^{೨}.

೯. ೩ಯ^{೨}−೧೨ಯರ+೧೨ರ^{೨}; ಯ^{೩}−೮ರ^{೩}; ೧೨ಯ^{೨}−೨೦ಯರ−೮ರ^{೨}.

೧೦. ೪ದ^{೪}+೪ದ^{೨}ನ^{೨}+೪ನ^{೪}; ೮ದ^{೩}+೮ನ^{೩}; ೨ದ^{೩}−೪ದ^{೨}ನ+೪ದನ^{೨}−೨ನ^{೩}.

೧೧. ೨ರ^{೨} + ೮ರ − ೬೪; ಅರ^{೨} − ೪ಅರ − ೯೬ಅ; ೪ರ^{೨} + ೨೦ರ − ೯೬.

೧೨. ೧೨ವ^{೨} − ೬೦ವ + ೭೨; ೪ವ^{೨} − ೨೮ವ + ೪೮; ೮ವ^{೨} − ೪೮ವ + ೬೪.

೧೩. ೧೬ಯ^{೩}−೧೦೦ಯ; ೪೮ಯ^{೩}−೮೮ಯ^{೨}−೮೦ಯ;
೩೬ಯ^{೩}+೧೧೪ಯ^{೨}+೬೦ಯ.

೧೪. ಯ^{೪} − ರ^{೪}; ಯ^{೬} − ರ^{೬}; ಯ^{೪} + ಯ^{೨}ರ^{೨} − ೨ರ^{೪}.

೧೫. ಯ^{೪}+೪ಯ^{೨}ರ^{೨}+೧೬ರ^{೪}; ಯ^{೪}+೮ಯರ^{೩};
ಯ^{೩}ರ−೨ಯ^{೨}ರ^{೨}+೪ಯರ^{೩}.

೧೬. ೧೬ಯ^{೪}−೭೨ಯ^{೨}ರ^{೨}+೮೧ರ^{೪}; ೧೬ಯ^{೪}−೪೮ಯ^{೩}ರ+೩೬ಯ^{೨}ರ^{೨};
(೬ಯ^{೨}−೧೩ಯರ+೬ರ^{೨})^{೨}.

೧೭. ೬ಯ^{೪} − ೪೮ಯ^{೨}ರ^{೨} + ೯೬ರ^{೪}; ೯ಯ^{೪} − ೧೨ಯ^{೨}ರ^{೨} − ೯೬ರ^{೪};
೧೫ಯ^{೪}−೬೬ಯ^{೨}ರ^{೨}+೨೪ರ^{೪}.

೧೮. ೬ಕ್ಷ^{೨} − ೨೫ಕ್ಷ + ೧೪; ೧೨ಕ್ಷ^{೨} − ೨ಕ್ಷ − ೪; ೩೦ಕ್ಷ^{೨} + ೨೫ಕ್ಷ − ೩೦;
೫೪ಕ್ಷ^{೨} + ೯೯ಕ್ಷ − ೯೦.

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವು

೯·೧· ೮, ೧೨ ಮತ್ತು ೨೦ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವಂಥ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ **ದೊಡ್ಡ** ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ಎಂದು ಕೇಳಿದರೆ ೪ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಈ ಉತ್ತರವು ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದಿಂದ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

೮ = ೨.೨.೨ = ೨^{೩}; ೧೨ = ೨.೨.೩ = ೨^{೨}·೩; ೨೦ = ೨.೨.೫ = ೨^{೨}.೫.

∴ ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ **ದೊಡ್ಡ ಸಾಮಾನ್ಯ** ಗುಣಕ (**ವಿಭಾಜಕ**) = ೨^{೨} = ೪.

ಮತ್ತು ೮, ೧೨ ಮತ್ತು ೨೦ ಇವುಗಳಿಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವಂಥ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿ **ಸಣ್ಣ** ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವದು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಇದ್ದರೆ ಅದೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣದಿಂದ ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಉತ್ತರವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿ **ಸಣ್ಣ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಭಾಜ್ಯವು** = ೨^{೩}.೩.೫ = ೧೨೦.

೮, ೧೨ ಮತ್ತು ೨೦ ಇವುಗಳಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವಂಥ ೧೨೦, ೨೪೦, ೩೬೦, ೪೮೦....ರಂಥ ಎಷ್ಟೋ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವವು. ಆದರೆ ಆ **ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೨೦.** ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ನಮಗೆ ಹೇಗೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ? ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅವಯುವಗಳನ್ನು** ತೆಗೆದ ನಂತರ ಆ ಅವಯವಗಳ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಕಂಡು ಬರುವ ಘಾತಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದೊರಕಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಬೈಜಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ ಈ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅಪವಾದವಲ್ಲ.

ಅಯ ಮತ್ತು ಅರ ಇವುಗಳಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದರೆ ಅಯರ,

ಅಇ^{೨}ಕ^{೩} ಮತ್ತು ಅಇಕ^{೪} ————,,———— ಅಇ^{೨}ಕ^{೪}, ಮತ್ತು

೮ಪ^{೩}ಬಮ^{೨}, ೧೨ಪಬ^{೪}ಮ, ಮತ್ತು ೬ಬ^{೨}ಮ^{೩}——,,—— ೨೪ಪ^{೩}ಬ^{೪}ಮ^{೩}.

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅ, ಯ, ಮತ್ತು ರ ಈ ಮೂರು ಗುಣಕಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಅವು ಮೂರೂ ಮೊದಲನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿವೆ, ಆದುದ-

ರಿಂದ ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಯುರ. ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅ, ಇ, ಮತ್ತು ಕ ಈ ಮೂರು ಗುಣಕಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಅ ಮೊದಲನೆಯ ಘಾತ-ದಲ್ಲಿದ್ದು ಇ ಯ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವು ೨ನೆಯದಿದೆ, ಮತ್ತು ಕದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತವಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಇಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯು $ಅಇ^{೨}ಕ^{೪}$. ಮೂರ-ನೆಯದರಲ್ಲಿ ೮, ೧೨ ಮತ್ತು ೬ ಇವುಗಳಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨೪, ಪದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವು $ಪ^{೨}$, ಬದ್ದು $ಬ^{೪}$ ಮತ್ತು ಮದ್ದು $ಮ^{೩}$, ಆದುದರಿಂದ ಇಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಯು $೨೪ಪ^{೨}ಬ^{೪}ಮ^{೩}$.

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅಥವಾ ರಾಶಿಗಳಿಂದ ನಿಃಶ್ಶೇಷ-ವಾಗಿ ಭಾಗಹೋಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇಲ್ಲವೆ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಥವಾ ರಾಶಿಗಳ **ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ** ಎಂದೆನ್ನು-ವರು. ಲಘು ಅಂದರೆ ಸಣ್ಣ, **ಲಘುತಮ** ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ. **ವಿಭಾಜಕ** ಅಂದರೆ ಯಾವುದರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಅದರಂತೆಯೇ **ವಿಭಾಜ್ಯ** ಎಂದರೆ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು. **ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ** ಈ ಸಂಜ್ಞೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ನಾವು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

೯.೨. **ಮ. ಸಾ.** ವಿ. ಇದು ಯಾವವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುವದೋ ಆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅವಯವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವದು. ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಯಲ್ಲಿ ಯಾವವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಅದು ಇರುವದೋ ಆ ಪ್ರತಿ-ಯೊಂದು ರಾಶಿಯು ಅವಯವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ

$೯ಪಬಯ^{೨}$, $೧೨ಪ^{೨}ಬ^{೩}ಯ^{೩}$, $೧೮ಪ^{೩}ಬ^{೨}ಯ^{೪}$ ಮತ್ತು $೨೪ಪಯ^{೬}$

ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ.** ವಿ. $೩ಪಯ^{೨}$,

ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ.** ವಿ. $೭೨ಪ^{೩}ಬ^{೩}ಯ^{೬}$.

ಇಲ್ಲಿ $೩ಪಯ^{೨}$ ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು $೭೨ಪ^{೩}ಬ^{೩}ಯ^{೬}$ ದ ಗುಣಕವಿದೆ ಎಂಬುದು ಕಂಡುಬರುವದು. **ಮ.ಸಾ.ವಿ.** ತೆಗೆಯುವಾಗ ಯಾವ ಯಾವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು ಕಂಡುಬರುವದೋ ಅದರ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಾದ ಘಾತವು (ಅಂದರೆಯೇ ಸಾಧಾರಣ

ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಘಾತ) ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯು-ವಾಗ ಯಾವ ಯಾವ ಗುಣಕವು ಕಂಡುಬರುವದೋ ಅದರ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ-ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳ-ಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೩.

ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಿರಿ:

೧. ೪ಅ; ೮ಇ. ೨. ೧೦ಕಗ; ೧೫ಕಘ. ೩. ೨ಕ^{೨}ಗ; ೪ಕಗ^{೨}.

೪. ೬ಕ^{೨}ಪಮ; ೮ಕ^{೪}ಪಮ^{೨}. ೫. ೪ಕಪಬ; ೮ಕ^{೨}ಬಮ^{೨}; ೬ಕಪ^{೨}ಮ.

೬. ೨ಕ; ೪ಕಗ; ೬ಗದ. ೭. ೮ಕ^{೨}ಗಪ; ೧೨ಗ^{೨}ಪಬ; ೨೪ಬ^{೨}ಕಗ.

೮. ೫ಗಯರ^{೨}; ೮ಗ^{೨}ದಯರ^{೪}; ೨೦ದ^{೩}ಯ^{೨}ರ.

೯. ೧೦ಯ^{೩}ರ^{೨}ಲ; ೧೫ಯ^{೨}ರಸ^{೨}; ೨೫ಪಯರ^{೩}ಸ.

೧೦. ೪ಅಯ^{೨}ರ; ೮ಯರ^{೩}ಲ; ೧೦ ಅ^{೨}ರಲ; ೬ಇಯ^{೪}ಲ^{೨}.

೧೧. ೨ಕ^{೫}ಗಯ^{೫}; ೩ಕ^{೩}ಗ^{೨}ಯ; ೫ಕಗ^{೩}ಯ^{೨}; ೬ಗಪ^{೨}ಯ^{೩}.

೧೨. ೧೪ಪಬಯ^{೪}; ೮ಪ^{೨}ಬಯ^{೩}; ೪ಬ^{೨}ಯ^{೨}; ೨೮ಪಯರ^{೩}.

೧೩. ೨ಯ^{೨}ರಸ^{೪}; ೬ಯರ^{೩}ಸ^{೨}; ೮ಯ^{೩}ರಲಸ^{೩}; ೧೨ರ^{೨}ಲ^{೨}ಸ.

೧೪. ೪ಅ^{೨}ಬ^{೩}; ೮ಅಕಬ^{೪}; ೧೫ಇಕ^{೪}ಬ; ೫ಅ^{೩}ಇ^{೨}ಬ.

೧೫. ೧೨ಯರ^{೨}ಲ; ೮ರ^{೨}ಲ^{೩}ಯ^{೨}; ೬ಲ^{೩}ಯರ^{೩}; ೪ಅಇ^{೨}.

೯.೩. **ಉ. ೧.** ೪ಪ + ೪ಮ, ೨ಪ^{೨} + ೪ಪಬ + ೨ಮ^{೨}, ಮತ್ತು ೬ಪ^{೨} – ೬ಮ^{೨} ಇವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪ಪ + ೪ಮ = ೪(ಪ + ಮ)

೨ಪ^{೨}+೪ಪಮ+೨ಮ^{೨} = ೨(ಪ^{೨}+೨ಪಮ+ಮ^{೨}) = ೨(ಪ+ಮ)^{೨}

೬ಪ^{೨} – ೬ಮ^{೨} = ೬(ಪ^{೨}–ಮ^{೨}) = ೬(ಪ+ಮ)(ಪ–ಮ)

ಇಲ್ಲಿ ೪, ೨ ಮತ್ತು ೬ ಇವುಗಳ **ಲ.ಸಾ.ವಿ.** ೧೨. (ಪ+ಮ) ದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವ ಘಾತ (ಪ+ ಮ)^{೨}. ಮತ್ತು (ಪ–ಮ) ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ.

∴ ೧೨(ಪ+ಮ)^{೨}(ಪ–ಮ) ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ೨(ಪ+ಮ) ಇದು ಇದೆ. **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ದ ಒಂದು ಗುಣಕ ಇರುವದು. ಕಾರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

ಉ. ೨. ಕಯ + ಗಯ – ೨ಕರ – ೨ಗರ, ೪ಕಯ² – ೧೬ಕರ² ಮತ್ತು ೬ಗಯ² – ೨೪ಗಯರ + ೨೪ಗರ² ಇವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕಯ+ಗಯ–೨ಕರ–೨ಗರ = ಯ(ಕ+ಗ)–೨ರ(ಕ+ಗ) = (ಕ+ಗ)(ಯ–೨ರ)

೪ಕಯ²–೧೬ಕರ² = ೪ಕ(ಯ²–೪ರ²) = ೪ಕ(ಯ+೨ರ)(ಯ–೨ರ)

೬ಗಯ²–೨೪ಗಯರ+೨೪ಗರ² =೬ಗ(ಯ²–೪ಯರ–೪ರ)=೬ಗ(ಯ–೨ರ)²

∴ ೧೨ಕಗ(ಕ+ಗ)(ಯ+೨ರ)(ಯ–೨ರ)² ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಯ – ೨ರ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುವದು.

ಉ. ೩. ೨ಪ³+೧೬ಮ³, ೩ಪ³–೨೪ಮ³ ಮತ್ತು ೬ಪ⁴+೨೪ಪ²ಮ²+೯೬ಮ⁴ ಇವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨ಪ³ + ೧೬ಮ³ = ೨(ಪ³ + ೮ಮ³)

= ೨(ಪ + ೨ಮ) (ಪ² – ೨ಪಮ + ೪ಮ²)

೩ಪ³ – ೨೪ಮ³ = ೩(ಪ³ – ೮ಮ³)

= ೩(ಪ – ೨ಮ) (ಪ² + ೨ಪಮ + ೪ಮ²)

೬ಪ⁴ + ೨೪ಪ²ಮ² + ೯೬ಮ⁴

= ೬(ಪ⁴ + ೪ಪ²ಮ² + ೧೬ಮ⁴)

= ೬ { (ಪ² + ೪ಮ²) – ೪ಪ²ಮ² }

= ೬(ಪ² + ೨ಪಮ + ೪ಮ²)(ಪ² – ೨ಪಮ + ೪ಮ²)

∴ ೬(ಪ+೨ಮ)(ಪ–೨ಮ)(ಪ²+೨ಪಮ+೪ಮ²)(ಪ²–೨ಪಮ+೪ಮ²)

ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೪. ೬ಯ² – ೧೩ಯರ + ೬ರ², ೧೦ಯ² – ೭ಯರ – ೧೨ರ² ಮತ್ತು ೮ಯ² + ೨ಯರ–೨೧ರ² ಇವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೬ಯ² – ೧೩ಯರ + ೬ರ² = ೬ಯ² – ೯ಯರ – ೪ಯರ + ೬ರ²

= ೩ ಯ(೨ಯ – ೩ರ) – ೨ರ(೨ಯ – ೩ರ)

= (೨ಯ – ೩ರ)(೩ಯ – ೨ರ)

೧೦ಯ² – ೭ಯರ – ೧೨ರ² = ೧೦ಯ² – ೧೫ಯರ + ೮ಯರ – ೧೨ರ²

= ೫ಯ(೨ಯ – ೩ರ) + ೪ರ(೨ಯ – ೩ರ)

= (೨ಯ – ೩ರ)(೫ಯ + ೪ರ)

$$೮ಯ^2 + ೨ಯರ - ೨೧ರ^2 = ೮ಯ^2 - ೧೨ಯರ + ೧೪ಯರ - ೨೧ರ^2$$
$$= ೪ಯ(೨ಯ - ೩ರ) + ೭ರ(೨ಯ - ೩ರ)$$
$$= (೨ಯ - ೩ರ)(೪ಯ + ೭ರ)$$

∴ $(೨ಯ-೩ರ)(೩ಯ-೨ರ)(೪ಯ+೭ರ)(೫ಯ+೪ರ)$ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**
$೨ಯ - ೩ರ$ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಉ. ೫. $೪೮ಪ^2-೨೮ಪಮ-೯೮ಮ^2$, $೪೮ಪ^2-೬೪ಪಮ-೧೪೦ಮ^2$, ಮತ್ತು $೪೮ಪ^2-೨೦೪ಪಮ+೨೧೦ಮ^2$ ಈ ರಾಶಿಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$೪೮ಪ^2 - ೨೮ಪಮ - ೯೮ಮ^2 = ೨(೨೪ಪ^2 - ೧೪ಪಮ - ೪೯ಮ^2)$$
$$= ೨(೨೪ಪ^2+೨೮ಪಮ-೪೨ಪಮ-೪೯ಮ^2)$$
$$= ೨\{೪ಪ(೬ಪ+೭ಮ)-೭ಮ(೬ಪ+೭ಮ)\}$$
$$= ೨(೬ಪ + ೭ಮ)(೪ಪ - ೭ಮ)$$
$$೪೮ಪ^2 - ೬೪ಪಮ - ೧೪೦ಮ^2 = ೪(೧೨ಪ^2 - ೧೬ಪಮ - ೩೫ಮ^2)$$
$$= ೪(೬ಪ + ೭ಮ)(೨ಪ - ೫ಮ)$$
$$೪೮ಪ^2-೨೦೪ಪಮ+೨೧೦ಮ^2 = ೬(೮ಪ^2 - ೩೪ಪಮ + ೩೫ಮ^2)$$
$$= ೬(೨ಪ - ೫ಮ)(೪ಪ - ೭ಮ)$$

∴ $೧೨(೨ಪ - ೫ಮ)(೪ಪ - ೭ಮ)(೬ಪ + ೭ಮ)$ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**
೨ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುತ್ತದೆ.

ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಬರೆಯುವ ಸುಲಭವಾದ ಮಾರ್ಗವು ಹೀಗೆ: ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯ ಎಲ್ಲ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ತರುವಾಯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಅನಂತರ ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಲ್ಲದವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕೊನೆಯ ರಾಶಿಯ ವರೆಗೆ ಹೋಗಬೇಕು. ಇಲ್ಲವೆ, ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಾದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ಮತ್ತು ಬಳಿಕ ಅದರಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಇತರ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಘಾತದ ಸಮಾವೇಶವಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ನೋಡಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

ಮುಂದಿನ ರಾಶಿಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. $ಯ^2 - ಯ - ೧೨$; $ಯ^2 + ೫ಯ + ೬$; $ಯ^2 - ೫ಯ - ೧೪$.

೨. $೪ಯ^2 - ೪೮ಯ+೧೨೮$; $೩ಯ^2+೯ಯ-೮೪$, $೨ಯ^2+೪ಯ-೭೦$.

೩. ೫ಬಯ+೫ಬಕ್ಷ; ೪ಯ^೨+೮ಯಕ್ಷ+೪ಕ್ಷ^೨; ೪ಯ^೨+೨ಯಕ್ಷ-೨ಕ್ಷ^೨.

೪. ೪ಯ^೨-೩೬ರ^೨; ೧೨ಯ^೨-೧೨ಯರ-೭೨ರ^೨; ೨ಯ^೨-೧೨ಯರ+೧೮ರ^೨.

೫. ೨ಯ^೨ + ೨ಯರ - ೪೦ರ^೨; ೩ಯ^೨ + ೩೩ಯರ + ೯೦ರ^೨; ೪ಯ^೨ + ೮ಯರ - ೯೬ರ^೨.

೬. ೪೮ಯ^೨ + ೧೨ಯ - ೧೮; ೯೬ಯ^೨ + ೪೦ಯ - ೨೪; ೭೨ಯ^೨ - ೬೦ಯ + ೧೨.

೭. ೧೫-೧೧ಯ+೨ಯ^೨; ೨೧-೧೬ಯ+೩ಯ^೨; ೩೫-೨೯ಯ-೬ಯ^೨.

೮. ೮-೩೬ಯ+೧೬ಯ^೨; ೧೮-೩೯ಯ+೧೫ಯ^೨; ೧೮-೧೦೨ಯ+೧೨೦ಯ^೨.

೯. ೨೦ರ^೨+೪೦ರಸ-೨೫ಸ^೨; ೩೬ರ^೨-೪೨ರಸ+೧೨ಸ^೨; ೧೮ರ^೨-೨೪ರಸ+೮ಸ^೨.

೧೦. ೮೦ರ^೨-೪೦ರ+೫; ೧೦೮ರ^೨-೧೮೦ರ+೭೫; ೪೮ರ^೨-೫೨ರ+೧೦.

೧೧. ೨೫ರ^೨-೩೬ಲ^೨; ೫೦ರ^೨+೧೨೦ರಲ+೭೨ಲ^೨; ೭೫ರ-೧೮೦ರಲ+೧೦೮ಲ^೨.

೧೨. ೩೨ಯ^೨-೧೮ಕ್ಷ^೨; ೮ಯ^೨-೬ಯಕ್ಷ-೯ಕ್ಷ^೨; ೮ಯ^೨-೬ಯಕ್ಷ-೯ಕ್ಷ^೨.

೧೩. ೩೨ಯ^೨+೧೨ಯರ-೨ರ^೨; ೩೨ಯ^೨+೮ಯರ-೪ರ^೨; ೩೨ಯ^೨-೧೨ಯರ+ರ^೨.

೧೪. ಪ^೨ - ೪ಮ^೨; ಪ^೩ + ೮ಮ^೩; ಪ^೪ + ೪ಪ^{೨}ಮ^೨ + ೧೬ಮ^೪.

೧೫. ೮ಪ^೩+೨೭ಮ^೩; ೧೨ಪ^{೨}ಮ-೨೭ಮ^೩; ೮ಪ^೩-೩೦ಪ^{೨}ಮ+೨೭ಪಮ^೨.

೧೬. ೪ಪಯ-೬ಪವ+೬ಮಯ-೯ಮವ; ೧೬ಪ^೨+೧೨ಪಮ-೧೮ಮ^೨; ೨೪ಯ^೨-೧೮ಯವ-೨೭ವ^೨.

೧೭. ೮೧ಕ^೪-೧೬ಗ^೪; ೩೬ಕ^೪-೨೫ಕ^{೨}ಗ^೨+೪ಗ^೪; ೩೬ಕ^೪+೭ಕ^{೨}ಗ^೨-೪ಗ^೪.

೧೮. ೩೦ವ^೨-೬೧ವ+೩೦; ೩೦ವ^೨+೧೧ವ-೩೦; ೩೦ವ^೨+೬೧ವ+೩೦; ೩೦ವ^೨-೧೧ವ-೩೦.

೧೯. ೨೫ಯ^೨+೧೦ಯರ-೮ರ^೨; ೫೦ಯ^೨-೨೦ಯರ-೧೬ರ^೨; ೭೫ಯ^೨+೬೦ಯರ+೧೨ರ^೨; ೧೦೦ಯ^೨-೮೦ಯರ+೧೬ರ^೨.

೨೦. ೪ಯ^೨-೧೬ಯರ+೧೫ರ^೨; ೮ಯ^೨+೩೨ಯರ+೩೦ರ^೨; ೧೨ಯ^೨-೧೨ಯರ-೪೫ರ^೨; ೧೬ಯ^೨+೧೬ಯರ-೬೦ರ^೨.

೨೧. $ಪ^{೪}-೧೬ಮ^{೪}$; $೨ಪ^{೪}-೩ಪ^{೨}ಮ^{೨}-೨೦ಮ^{೪}$;
$೨ಪ^{೪}+೧೩ಪ^{೨}ಮ^{೨}+೨೦ಮ^{೪}$.

೨೨. $೪ಅ^{೨}-೯ಕ^{೨}$: $೮ಅ^{೩}+೨೭ಕ^{೩}$; $೮ಅ^{೩}-೨೭ಕ^{೩}$;
$೧೬ಅ^{೪}+೩೬ಅ^{೨}ಕ^{೨}+೮೧ಕ^{೪}$.

೨೩. $೨ಯ^{೨}-೧೧ಯವ+೧೫ವ^{೨}$; $೨ಯ^{೨}+೧೧ಯವ+೧೫ವ^{೨}$;
$೪ಯ^{೨}-೨೫ವ^{೨}$; $ಯ^{೨}-೯ವ^{೨}$.

೨೪. $೭೨೯ಪ^{೩}-೬೪ಮ^{೩}$: $೩೬ಪ^{೨}+೬೫ಪಮ-೩೬ಮ^{೨}$;
$೧೬೨ಪ^{೩}+೭೨ಪ^{೨}ಮ+೩೨ಪಮ^{೨}$.

೨೫. $೨೮ಯ^{೨}-೧೦೬ಯವ+೨೮ವ^{೨}$; $೨೮ಯ^{೨}+೬೨ಯವ-೨೦ವ^{೨}$;
$೨೮ಯ^{೨}-೨೮ಯವ-೨೪೫ವ^{೨}$.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಇವೆರಡನ್ನೂ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨೬. $ಯ^{೨}-೧೭ಯ+೫೨$; $ಯ^{೨}+೫ಯ-೩೬$; $ಯ^{೨}+೨೧ಯ-೧೦೦$;
$೬ಯ^{೨}-೪೮ಯ+೯೬$.

೨೭. $೧೫ವ^{೨}-೩೪ವ+೧೫$; $೩೦ವ^{೨}+೩೨ವ-೩೦$; $೭೫ವ^{೨}-೯೦ವ+೨೭$;
$೧೦೦ವ^{೨}-೩೬$.

೨೮. $೮೧ಪ^{೨}-೪೯ಮ^{೨}$; $೭೨೯ಪ^{೩}+೩೪೩ಮ^{೩}$; $೬೩ಪ^{೨}-೩೨ಪಮ-೬೩ಮ^{೨}$.

೨೯. $೮ಕ^{೨}-೫೮ಕಗ+೨೭ಗ^{೨}$; $೪ಕ^{೨}-೩೫ಕಗ+೫೪ಗ^{೨}$;
$೧೬ಕ^{೨}-೨೧೬ಕಗ+೭೨೯ಗ^{೨}$.

೩೦. $೧೨ಕ^{೩}-೨೨ಕ^{೨}ಗ+೮ಕಗ^{೨}$; $೧೬ಕ^{೩}ಗ-೩೨ಕ^{೨}ಗ^{೨}+೧೨ಕಗ^{೩}$;
$೩೬ಕ^{೩}ಗ^{೨}-೪೨ಕ^{೨}ಗ^{೩}+೧೨ಕಗ^{೪}$.



ಹತ್ತನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ

೧೦·೧. $\frac{೩}{೮}$, $\frac{೪}{೭}$, $\frac{೯}{೧೧}$ .... ಈ ತರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ಒಳ್ಳೇ ಪರಿಚಿತವಿವೆ. ಅವುಗಳಿಗೆ ನಾವು **ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ**ಗಳೆಂದು ಅನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನಡುವಿನ ಗೆರೆಯ ಮೇಲಿನ ೩, ೪, ೯ .... ಮೊದಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ **ಅಂಶ**ವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆಯಿದ್ದು, ೮, ೭, ೧೧ .... ಮೊದಲಾದ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ **ಛೇದ**ವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದೆಯೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಛೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಇದ್ದ ೩, ೪, ೯, ೮, ೭, ೧೧ .... ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು **ವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.** ವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆಯೇ ಅಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಛೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವೆರಡೂ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ **ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ** ಇರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೩ ರೂ.ಗಳನ್ನು ೮ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲು $\frac{೩}{೮}$ ರೂ. ಇರುವದು.

ಪ ರೂ.ಗಳನ್ನು ೮ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲು $\frac{ಪ}{೮}$ ರೂ. ಇರುವದು.

೩ ರೂ.ಗಳನ್ನು ಬ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲು $\frac{೩}{ಬ}$ ರೂ. ಇರುವದು.

ಮತ್ತು ಪ ರೂ.ಗಳನ್ನು ಬ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲು $\frac{ಪ}{ಬ}$ ರೂ. ಇರುವದು.

$\frac{೩}{೮}$, $\frac{೪}{೭}$, $\frac{೯}{೧೧}$ .... ಇವುಗಳಂತೆಯೇ $\frac{ಪ}{ಬ}$, $\frac{ಅ}{ಕ}$, $\frac{ಯ}{ರ}$ ಇವು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಿದ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ಸಹಜವಾಗಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು, ವಜಾಬಾಕಿ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ ಮೊದಲಾದ ಸಂಗತಿ-

ಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ಎಲ್ಲ ನಿಯಮಗಳು ಇವುಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿಯೂ ಹಾಗೆಯೇ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ವಿಷಯವಾಗಿ ಇನ್ನೂ ಹೊಸದಾಗಿ ಈಗ ಕಲಿಯುವಂತಹದು ಏನೂ ಇಲ್ಲ.

೧೦·೨. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಭಿಪ್ರೇತ ಅರ್ಥಗಳು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ಇರುತ್ತವೆ. $\frac{೩}{೮}$ದ ಅರ್ಥವು ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ೮ ಸರಿಯಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ೩ ಭಾಗಗಳು ಹೀಗೆ, ಅಥವಾ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು (ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು) ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ, ಹೇಗೆಂದರೆ ಆನಂದರಾಯರು ಮತ್ತು ವಸಂತರಾಯರು ಇವರಿಬ್ಬರು ಪಾಲುಗಾರಿಕೆಯ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ೩:೮ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಣವನ್ನು ತೊಡಗಿಸಿದ್ದಾರೆ, ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಆನಂದರಾಯರ ಭಾಂಡವಲು ೩೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ವಸಂತರಾಯರದು ೮೦೦೦ ರೂ. ಇರುವದು, ಅಥವಾ ೩ರ ಸರಿಯಾಗಿ ೮ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದರೆ ೩ ಭಾಗಿಲೆ ೮ ಎಂದು ಆಗುತ್ತದೆ. $\frac{ಪ}{ಬ}$ದಂಥ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಿದ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿಯೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅರ್ಥವು ಅಭಿಪ್ರೇತವಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಾವು ಯಾವದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಅರ್ಥದಿಂದಲೇ, ಅಂದರೆ $\frac{೩}{೮}$ ಅಂದರೆ ೩ ಭಾಗಿಲೆ ೮, $\frac{ಪ}{ಬ}$ ಅಂದರೆ ಪ ಭಾಗಿಲೆ ಬ ಈ ಅರ್ಥದಿಂದ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

೧೦·೩. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ಅಷ್ಟೇ ಇರುತ್ತದೆ, ಸ್ವರೂಪ ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಹೇಗಂದರೆ, $\frac{೩}{೮} = \frac{೩ \times ೨}{೮ \times ೨} \left(= \frac{೬}{೧೬}\right) = \frac{೩ \times ೪}{೮ \times ೪} \left(= \frac{೧೨}{೩೨}\right) = \frac{೩ \times ೮}{೮ \times ೮} = \left(\frac{೨೪}{೬೪}\right)$.

ಒಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹ ಈ ಸಂಗತಿಯ ನಿಜತ್ವವನ್ನು ನಾವು ಮನಗಾಣಿಸಬಹುದು. $\frac{೩}{೮}$ ರೂ. ಅಂದರೆ ರೂಪಾಯಿಯ ಚವಲಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೩ ಚವಲಿಗಳು, $\frac{೬}{೧೬}$ ರೂ. ಅಂದರೆ ಅದರ ಆಣೆಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ

ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೬ ಆಣೆಗಳು, $\frac{೩}{೮}$ ರೂ. ಅಂದರೆ ಅರ್ಧ ಆಣೆಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೧೨ ಅರ್ಧ ಆಣೆಗಳು. ಮತ್ತು $\frac{೨೪}{೬೪}$ ರೂ. ಅಂದರೆ ಬಿಲ್ಲಿಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೨೪ ಬಿಲ್ಲಿಗಳು. ಈಗ ೩ ಚವಲಿಗಳು = ೬ ಆಣೆಗಳು = ೧೨ ಅರ್ಧ ಆಣೆಗಳು = ೨೪ ಬಿಲ್ಲಿಗಳು ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $\frac{೨೪}{೪೮} = \frac{೨೪ \div ೩}{೪೮ \div ೩} \left(= \frac{೮}{೧೬}\right) = \frac{೨೪ \div ೬}{೪೮ \div ೬} \left(= \frac{೪}{೮}\right) = \frac{೨೪ \div ೮}{೪೮ \div ೮}$ $\left(= \frac{೩}{೬}\right)$. ೨೪ ರೂ. ೪೮ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ೮ ರೂ. ೧೬ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ೪ ರೂ. ೮ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ೩ ರೂ. ೬ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪಾಲಿಗೆ ಅಷ್ಟೇ ರಕಮು (ಅರ್ಧ ರೂಪಾಯಿಯು) ಬರುವದು.

$$\text{ಆದುದರಿಂದ } \frac{ಪ}{ಬ} = \frac{ಪ \times ಮ}{ಬ \times ಮ} \left(= \frac{ಪಮ}{ಬಮ}\right) = \frac{ಪ \div ಮ}{ಬ \div ಮ}.$$

೧೦.೪. $\frac{೨೪}{೩೬}$, $\frac{೧೨}{೧೬}$, $\frac{೧೮}{೬೦}$, ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೨, ೪ ಮತ್ತು ೬ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $\frac{೨}{೩}$, $\frac{೩}{೪}$, $\frac{೩}{೧೦}$, ಈ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ನಾವು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಿಗೆ ಅ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $\frac{ಯ}{ಕ್ಷ}$ ಈ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ}$ ಮತ್ತು $\frac{ಯ}{ಕ್ಷ}$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಸ್ವರೂಪಗಳು ಮಾತ್ರ ಭಿನ್ನವಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧ-ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಹ ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು. $\frac{೨೦}{೨೪} = ೨೦ \div ೨೪$ $= (೪ \times ೫)$ ಭಾಗಿಲೆ $(೪ \times ೬) = ೪ \times ೫$ ಭಾಗಿಲೆ ೪ ಭಾಗಿಲೆ $೬ = ೫$ ಭಾಗಿಲೆ $೬ = \frac{೫}{೬}$,

ಅದರಂತೆಯೇ, $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ} = ಅಯ$ ಭಾಗಿಲೆ $ಅಕ್ಷ = ಅಯ$ ಭಾಗಿಲೆ ಅ ಭಾಗಿಲೆ $ಕ್ಷ = ಯ$ ಭಾಗಿಲೆ $ಕ್ಷ = \frac{ಯ}{ಕ್ಷ}$. ಆದುದರಿಂದ $\frac{ಅಯ}{ಅಕ್ಷ}$ ಈ

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಸಮಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $\frac{ಯು}{ಕ್ಷ}$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು, ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ $\frac{ಯು}{ಕ್ಷ}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಅ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $\frac{ಅಯು}{ಅಕ್ಷ}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\frac{ಅಯು}{ಅಕ್ಷ}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯ **ಅಂಶ** ಮತ್ತು **ಛೇದ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ **ಅಯು** ಮತ್ತು **ಅಕ್ಷ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪವನ್ನು (ಸರಳರೂಪ-ವನ್ನು) ಕೊಡುವದಿದ್ದರೆ **ಅಂಶ** ಮತ್ತು **ಛೇದ** ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ **ಭಾಗಿಸಬೇಕು.** ಮೇಲೆ $\frac{೨೪}{೩೬}$, $\frac{೧೨}{೧೬}$, $\frac{೧೮}{೬೦}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ **ಅಂಶ** ಮತ್ತು **ಛೇದ** ಇವುಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ದಿಂದ **ಭಾಗಿಸಿ** ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

೧೦·೫. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. **ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪವನ್ನು ಕೊಡು-ವದೆಂದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯಬೇಕು, ಮತ್ತು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವದೆಂದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮಾಡಬೇಕು.**

ಉ. ೧. $\frac{೧೦೮}{೧೪೪} = \frac{೨^೨.೩^೩}{೨^೪.೩^೨} = \frac{೩}{೨^೨} = \frac{೩}{೪}.$ ಇಲ್ಲಿ $೨^೨.೩^೨$, ಅಂದರೆ ೩೬ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೨. $\frac{ಅ^೨ಕ}{ಅಕ^೨} = \frac{ಅ}{ಕ}.$ ಇಲ್ಲಿ ಅಕ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಇರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೩. $\frac{೧೫ಅ^೨ಇಕ^೩}{೩೫ಅ^೩ಇ^೨ಕ} = \frac{೩ಕ^೨}{೭ಅಇ}$ ಇಲ್ಲಿ $೫ಅ^೨ಇಕ$ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.**

ಇದೆಯೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಈ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಯಿಂದ **ಅಂಶ** ಮತ್ತು **ಛೇದ** ಇವುಗಳಿಗೆ **ಭಾಗಿಸುವದೆಂದರೆ** ಅಂಶ ಮತ್ತು **ಛೇದ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕುವದು.** ಈ **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು** ಯಾವವು ಎಂದು ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು $\frac{೫ \times ೩ \times ಅ^{೨} \times ಇ \times ಕ \times ಕ^{೨}}{೫ \times ೭ \times ಅ^{೨} \times ಅ \times ಇ \times ಇ \times ಕ}$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ನಂತರ ಬಹಳ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೫.

ಕೆಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. $\frac{ಅ^{೪}ಇ}{ಅ^{೨}ಇ^{೩}}$. ೨. $\frac{ಕ^{೨}ಗ^{೩}}{೩ಕ^{೪}ಗ^{೫}}$. ೩. $\frac{೪ಯ^{೨}ರಲ}{ಯ^{೩}ರ^{೨}ಲ}$. ೪. $\frac{೪ಅ^{೨}ಯ^{೫}}{೮ಅ^{೩}ಯ^{೩}}$.

೫. $\frac{೩ಪ^{೫}ಮ^{೭}}{೧೨ಪ^{೪}ಮ^{೮}}$. ೬. $\frac{೨೪ಕ^{೬}ಗ^{೩}}{೩೦ಕ^{೪}ಗ^{೫}}$. ೭. $\frac{೮ಪ^{೨}ಬಮ^{೩}}{೧೨ಪಬ^{೨}ಮ^{೫}}$.

೮. $\frac{೧೦ಪ^{೪}ಬ^{೩}ಮ^{೨}}{೧೫ಪ^{೫}ಬಮ^{೩}}$. ೯. $\frac{೧೫ಪ^{೨}ಬ^{೩}ಮ^{೫}}{೨೫ಪ^{೪}ಬಮ^{೩}}$. ೧೦. $\frac{೧೦ಯ^{೩}ರ^{೨}ಲ^{೨}}{೨೫ಯ^{೨}ರಲ^{೪}}$.

೧೧. $\frac{೪೮ಯ^{೪}ರ^{೩}ಲ^{೨}}{೩೦ಯ^{೫}ರಲ^{೩}}$. ೧೨. $\frac{೨೪ಕ^{೨}ಗ^{೬}ಘ^{೪}}{೪೪ಕ^{೩}ಗ^{೪}ಘ^{೫}}$. ೧೩. $\frac{೨೨ಅ^{೫}ಯ^{೪}ರಲ^{೩}}{೩೩ಅ^{೨}ಯ^{೫}ರ^{೩}ಲ^{೨}}$.

೧೪. $\frac{೪೪ಪ^{೩}ಬಮ^{೪}}{೭೬ಪ^{೨}ಬ^{೪}ಮ^{೩}}$. ೧೫. $\frac{೩೬ಅಪ^{೨}ಬಮ^{೪}}{೧೪೪ಇಪ^{೩}ಮ^{೫}}$. ೧೬. $\frac{೪೦ಅ^{೪}ಇ^{೩}ಯ^{೨}ರ^{೫}}{೭೨ಅ^{೫}ಇ^{೪}ಯರ^{೩}}$.

೧೭. $\frac{೨೮ಯ^{೫}ರ^{೩}ಲ^{೨}ಸ^{೪}}{೭೦ಯ^{೨}ರ^{೫}ಸ^{೩}}$

೧೦೬. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಮಗೆ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ ಅವುಗಳ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಗುಣಕಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣದೇ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು

ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ-ವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $\frac{೨ಕಯ+೨ಕಕ್ಷ}{೩ಪಯ+೩ಪಕ್ಷ}=\frac{೨ಕ(ಯ+ಕ್ಷ)}{೩ಪ(ಯ+ಕ್ಷ)}=\frac{೨ಕ}{೩ಪ}.$

ಇಲ್ಲಿ **ಅಂಶ** ಮತ್ತು **ಛೇದ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯ + ಕ್ಷ ಇದು **ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿದೆ.** ಅದನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿದೆ, ಅಂದರೆಯೇ **ಅಂಶ** ಮತ್ತು **ಛೇದ** ಇವುಗಳಿಗೆ ಅದರಿಂದ **ಭಾಗಿಸಿದೆ.**

ಉ. ೨. $\frac{೮ಕಪ+೨೦ಕಮ}{೧೨ನಪ+೩೦ನಮ}=\frac{೪ಕ(೨ಪ+೫ಮ)}{೬ನ(೨ಪ+೫ಮ)}=\frac{೨ಕ}{೩ನ}.$

ಉ. ೩. $\frac{೧೨ಅಕ(ಅ^{೨}-ಕ^{೨})}{೧೮ಇಕ(ಅ^{೨}+೨ಅಕ+ಕ^{೨})}=\frac{೧೨ಅಕ(ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ)}{೧೮ಇಕ(ಅ+ಕ)^{೨}}$

$$=\frac{೨ಅ(ಅ-ಕ)}{೩ಇ(ಅ+ಕ)}.$$

ಉ. ೪. $\frac{ಯ^{೨}-೪ಯ-೩೨}{ಯ^{೨}-೫ಯ-೨೪}=\frac{(ಯ+೪)(ಯ-೮)}{(ಯ+೩)(ಯ-೮)}=\frac{ಯ+೪}{ಯ+೩}.$

ಉ. ೫. $\frac{೧೨ಯ^{೨}+೧೧ಯಕ್ಷ-೫೬ಕ್ಷ^{೨}}{೧೫ಯ^{೨}+೧೩ಯಕ್ಷ-೭೨ಕ್ಷ^{೨}}$ ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತರೂಪ ಕೊಡಿರಿ.

$$೧೨ಯ^{೨}+೧೧ಯಕ್ಷ-೫೬ಕ್ಷ^{೨}=೧೨ಯ^{೨}+೩೨ಯಕ್ಷ-೨೧ಯಕ್ಷ-೫೬ಕ್ಷ^{೨}$$
$$=೪ಯ(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)-೭ಕ್ಷ(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)$$
$$=(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)(೪ಯ-೭ಕ್ಷ)$$

$$೧೫ಯ^{೨}+೧೩ಯಕ್ಷ-೭೨ಕ್ಷ^{೨}=೧೫ಯ^{೨}+೪೦ಯಕ್ಷ-೨೭ಯಕ್ಷ-೭೨ಕ್ಷ^{೨}$$
$$=೫ಯ(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)-೯ಕ್ಷ(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)$$
$$=(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)(೫ಯ-೯ಕ್ಷ).$$

$$\therefore \frac{೧೨ಯ^{೨}+೧೧ಯಕ್ಷ-೫೬ಕ್ಷ^{೨}}{೧೫ಯ^{೨}+೧೩ಯಕ್ಷ-೭೨ಕ್ಷ^{೨}}=\frac{(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)(೪ಯ-೭ಕ್ಷ)}{(೩ಯ+೮ಕ್ಷ)(೫ಯ-೯ಕ್ಷ)}=\frac{೪ಯ-೭ಕ್ಷ}{೫ಯ-೯ಕ್ಷ}.$$

ಉ. ೬. $\frac{೭೨೯ಪ^{೬}-೪೦೯೬ಪಮ^{೬}}{೧೬೨ಪ^{೪}ಮ+೨೮೮ಪ^{೨}ಮ^{೩}+೫೧೨ಮ^{೫}}$ ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ-ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$೭೨೯ಪ^{೭} - ೪೦೯೬ಪಮ^{೬}$$
$$= ಪ(೭೨೯ಪ^{೬} - ೪೦೯೬ಮ^{೬})$$
$$= ಪ(೨೭ಪ^{೩} + ೬೪ಮ^{೩})(೨೭ಪ^{೩} - ೬೪ಮ^{೩})$$
$$= ಪ(೩ಪ + ೪ಮ)(೯ಪ^{೨} - ೧೨ಪಮ + ೧೬ಮ^{೨})(೩ಪ - ೪ಮ)(೯ಪ^{೨} + ೧೨ಪಮ + ೧೬ಮ^{೨})$$

$$೧೬೨ಪ^{೪}ಮ + ೨೮೮ಪ^{೨}ಮ^{೩} + ೫೧೨ಮ^{೫}$$
$$= ೨ಮ(೮೧ಪ^{೪} + ೧೪೪ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ೨೫೬ಮ^{೪})$$
$$= ೨ಮ(೮೧ಪ^{೪} + ೨೮೮ಪ^{೨}ಮ^{೨} + ೨೫೬ಮ^{೪} - ೧೪೪ಪ^{೨}ಮ^{೨})$$
$$= ೨ಮ\{(೯ಪ^{೨} + ೧೬ಮ^{೨})^{೨} - (೧೨ಪಮ)^{೨}\}$$
$$= ೨ಮ(೯ಪ^{೨} - ೧೨ಪಮ + ೧೬ಮ^{೨})(೯ಪ^{೨} + ೧೨ಪಮ + ೧೬ಮ^{೨})$$

$$\therefore \frac{೭೨೯ಪ^{೭} - ೪೦೯೬ಪಮ^{೬}}{೧೬೨ಪ^{೪}ಮ + ೨೮೮ಪ^{೨}ಮ^{೩} + ೫೧೨ಮ^{೫}}$$
$$= \frac{ಪ(೩ಪ+೪ಮ)(೯ಪ^{೨}-೧೨ಪಮ+೧೬ಮ^{೨})(೩ಪ-೪ಮ)(೯ಪ^{೨}+೧೨ಪಮ+೧೬ಮ^{೨})}{೨ಮ(೯ಪ^{೨}-೧೨ಪಮ+೧೬ಮ^{೨})(೯ಪ^{೨}+೧೨ಪಮ+೧೬ಮ^{೨})}$$
$$= \frac{ಪ(೩ಪ+೪ಮ)(೩ಪ-೪ಮ)}{೨ಮ},$$ ಇಲ್ಲವೆ

$$\frac{೭೨೯ಪ^{೭}-೪೦೯೬ಪಮ^{೬}}{೧೬೨ಪ^{೪}ಮ+೨೮೮ಪ^{೨}ಮ^{೩}+೫೧೨ಮ^{೫}}$$
$$= \frac{ಪ(೭೨೯ಪ^{೬}-೪೦೯೬ಮ^{೬})}{೨ಮ(೮೧ಪ^{೪}+೧೪೪ಪ^{೨}ಮ^{೨}+೨೫೬ಮ^{೪})}$$
$$= \frac{ಪ(೯ಪ^{೨}-೧೬ಮ^{೨})(೮೧ಪ^{೪}+೧೪೪ಪ^{೨}ಮ^{೨}+೨೫೬ಮ^{೪})}{೨ಮ(೮೧ಪ^{೪}+೧೪೪ಪ^{೨}ಮ^{೨}+೨೫೬ಮ^{೪})}$$
$$= \frac{ಪ(೯ಪ^{೨}-೧೬ಮ^{೨})}{೨ಮ}.$$

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವದರ ಅವಯುವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವೆನಿಸುವದೋ ಅದರ ಅವಯುವಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಉಳಿದುದರ ಅವಯುವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ ಸಹಾಯಕ ಸೂಚನೆಯು ದೊರೆಯುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

ಕೆಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ:

೧. $\frac{೪ಅಯ + ೪ಇಯ}{೧೨ಅಯ + ೧೨ಇಯ}$.

೨. $\frac{೫ಪಯ + ೫ಪರ}{೧೫ಬಯ + ೧೫ಬರ}$.

೩. $\frac{೨೪ಕಯ + ೨೪ಗಯ}{೩೬ಕರ + ೩೬ಗರ}$.

೪. $\frac{೨೫ಅಯ + ೨೫ಅರ}{೩೫ಕಯ + ೩೫ಕರ}$.

$\frac{೧೬ಕಯ + ೧೬ಕರ}{೪೮ಕವ + ೪೮ಕಸ}$.

೬. $\frac{೪ಪ + ೧೨ಮ}{೧೬ಪಬ + ೪೮ಬಮ}$.

೭. $\frac{೮ಪಯ + ೪೮ಪರ}{೯ಬಯ + ೫೪ಬರ}$.

೮. $\frac{೨೭ಪಯ + ೪೫ಪರ}{೧೮ಪಯ + ೫೪ಪರ}$.

೯. $\frac{೪ಕ + ೪ಗ}{ಪಕ^{೨} - ಪಗ^{೨}}$.

೧೦. $\frac{ಅ - ೪}{ಅ^{೨} - ೧೬}$.

೧೧. $\frac{೨ಕ + ೭ಗ}{೪ಕ^{೨} - ೪೯ಗ^{೨}}$.

೧೨. $\frac{ಮ^{೨} - ೨೫}{ಮ^{೨} - ೩ಮ - ೧೦}$.

೧೩. $\frac{೮ಪ^{೨} - ೧೮}{೧೨ಪ^{೨} + ೧೨ಪ - ೯}$.

೧೪. $\frac{೯ಪ^{೨} - ೨೫}{೮೧ಪ^{೪} - ೬೨೫}$.

೧೫. $\frac{೧೪೪ಪ^{೨} - ೧೬೯ಮ^{೨}}{೧೪೪ಪ^{೨} + ೧೪೪ಪಮ - ೧೩ಮ^{೨}}$.

೧೬. $\frac{೮ಅ - ೧೨ಕ}{೧೬ಅ^{೨} - ೩೬ಕ^{೨}}$.

೧೭. $\frac{೧೦ಪಯ + ೧೨ಪವ}{೭೫ಬಯ^{೨} - ೧೦೮ಬವ^{೨}}$.

೧೮. $\frac{೩೬ಯ^{೨} - ೪೯ಲ^{೨}}{೩೬ಯ^{೨} + ೮೪ಯಲ + ೪೯ಲ^{೨}}$.

೧೯. $\frac{೪ರ^{೨} - ೩೬ರಸ + ೮೧ಸ^{೨}}{೮ರ^{೨} - ೧೬೨ಸ^{೨}}$.

೨೦. $\frac{೪ಯ^{೨} - ೧೫ಯಸ - ೨೫ಸ^{೨}}{ಯ^{೨} - ೨೫ಸ^{೨}}$.

೨೧. $\frac{೧೬ಯ^{೨} + ೫೬ಯರ + ೪೯ರ^{೨}}{೨೦ಯ^{೨} + ೩೧ಯರ - ೭ರ^{೨}}$.

೨೨. $\frac{೪ಪ^{೨} - ೩೬ಪಮ + ೮೧ಮ^{೨}}{೨೦ಪ^{೨} - ೯೬ಪಮ + ೨೭ಮ^{೨}}$.

೨೩. $\frac{೧೬ಯ^{೨} - ೧೦ಯರ + ರ^{೨}}{೨೪ಯ^{೨} - ೧೧ಯರ + ರ^{೨}}$.

೨೪. $\frac{೨೦ಯ^{೨} + ೪೧ಯರ - ೯ರ^{೨}}{೨೦ಯ^{೨} - ೯ಯರ + ರ^{೨}}$.

೨೫. $\frac{೯ರ^{೨} + ೯ರಸ - ೨೮ಸ^{೨}}{೯ರ^{೨} + ೧೮ರಸ - ೪೦ಸ^{೨}}$.

೨೬. $\frac{೩೨ಪ^{೨} + ೪೦ಪಮ - ೧೦೦ಮ^{೨}}{೧೨೦ಪ^{೨} - ೧೯೦ಪಮ + ೫೦ಮ^{೨}}$.

೨೭. $\frac{೧೦ಅ^{೨} - ೪೧ಅ + ೨೧}{೧೫ಅ^{೨} - ೪ಅ - ೩}$.

೨೮. $\frac{೩೦ಪ^{೨} - ೨೨ಪ - ೨೮}{೧೦೦ಪ^{೨} - ೧೬೫ಪ + ೩೫}$.

೨೯. $\frac{೬ಪಯ^{೨} - ೨೮ಪಯರ + ೩೨ಪರ^{೨}}{೨೪ಬಯ^{೨} - ೮೮ಬಯರ + ೬೪ಬರ^{೨}}$.

೩೦. $\frac{ಯ^{೨} + ೩ಯರ - ೪ಯ - ೧೨ರ}{೨ಯ^{೨} - ಯರ - ೮ಯ + ೪ರ}$. ೩೧. $\frac{ಕ^{೩} - ೮ಪ^{೩}}{ಕ^{೨} - ೪ಪ^{೨}}$.

೩೨. $\frac{೬೪ಬ^{೩} + ೨೭ಮ^{೩}}{೬೪ಬ^{೩} + ೯೬ಬ^{೨}ಮ + ೩೬ಬಮ^{೨}}$.

೩೩. $\frac{೨೭ತ^{೩} - ನ^{೩}}{೮೧ತ^{೪} + ೯ತ^{೨}ನ^{೨} + ನ^{೪}}$. ೩೪. $\frac{೪ಯ^{೨} + ೨೦ಯಕ್ಷ + ೧೬ಕ್ಷ^{೨}}{೧೬ಯ^{೨} + ೬೮ಯಕ್ಷ + ೧೬ಕ್ಷ^{೨}}$.

೩೫. $\frac{೧೫ಯ^{೨} - ೯ಯಕ್ಷ - ೬ಕ್ಷ^{೨}}{೧೫ಯ^{೨} + ೨೧ಯಕ್ಷ + ೬ಕ್ಷ^{೨}}$. ೩೬. $\frac{೧೬ದ^{೪} - ೮೧ನ^{೪}}{೧೬ದ^{೪} + ೩೨ದ^{೨}ನ^{೨} - ೯ನ^{೪}}$.

೩೭. $\frac{೭೨೯ಯ^{೬} - ವ^{೬}}{೮೧ಯ^{೪} - ವ^{೪}}$. ೩೮. $\frac{೧೦೦೦ - ೩೪೩ರ^{೩}}{೨೦೦ಯ^{೨} - ೨೮೦ಯ^{೨}ರ + ೯೮ಯ^{೨}ರ^{೨}}$.

೩೯. $\frac{೫೧೨ + ೧೩೩೧ಯ^{೩}}{೧೯೨ಪ + ೫೨೮ಪಯ + ೩೬೩ಪಯ^{೨}}$.

೭.

ಗುಣಾಕಾರ.

೧೦೭. $\frac{೩}{೪}$ ಮತ್ತು $\frac{೫}{೭}$ ಅಥವಾ $\frac{೨}{೩} \times \frac{೫}{೭} \times \frac{೪}{೯}$ ಈ ತರದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ? ಅಂಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಆದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು ಇಷ್ಟ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೧೫}{೨೮}$ ಮತ್ತು $\frac{೪೦}{೧೮೯}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{ಪ}{ಬ}$ ಮತ್ತು $\frac{ಭ}{ಮ}$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅದನ್ನು ನಾವು $\frac{ಪಭ}{ಬಮ}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಇದು ಸಹಜವಾಗಿದೆ. $\frac{ಪ}{ಬ}$ ಕ್ಕೆ $\frac{ಭ}{ಮ}$

ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು ಅಂದರೆ $\frac{ಪ}{ಬ}$ಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಭ ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು ($\frac{ಪ}{ಬ}$ದ ಭ ಪಟ್ಟು ಮಾಡುವದು) ಮತ್ತು ಈ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಮ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದು (ಮ ನೆಯ ಪಾಲನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು) $\frac{ಪ}{ಬ}$ಕ್ಕೆ ಭ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಾಕಾರವು $\frac{ಪಭ}{ಬ}$ ಮತ್ತು ಈ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಮ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಉತ್ತರವು $\frac{ಪಭ}{ಬಮ}$. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{ಪ}{ಬ} \times \frac{ಭ}{ಮ} \times \frac{ಯ}{ವ} = \frac{ಪಭಯ}{ಬಮವ}$. ಎಷ್ಟೋ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೂ ಇದೇ ನಿಯಮವು ಅನ್ವಯಿಸುವದು.

$$\textbf{ಬೇಕಾಗಿರುವ ಗುಣಾಕಾರ} = \frac{\textbf{ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}{\textbf{ಎಲ್ಲ ಛೇದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}$$

ಸಹಜವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದು ಹಾಕುವೆವು ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವೆವು. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಈಗಿನ ವರೆಗೆ ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತ ಬಂದಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $\frac{೨}{೫}$, $\frac{೩}{೭}$, $\frac{೫}{೬}$ ಮತ್ತು $\frac{೭}{೧೦}$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅದನ್ನು ನಾವು $\frac{೨೧೦}{೨೧೦೦}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವಂಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ, $\left(\frac{೨}{೫} \times \frac{೩}{೭} \times \frac{೫}{೬} \times \frac{೭}{೧೦}\right)$ ತರುವಾಯ $\frac{೧}{೧೦}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಮಾಡಿ ಹೇಗೆ ಬರೆದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $\frac{ಅ}{ಬ} \times \frac{ಬ}{೨ಮ} = \frac{ಅ}{೨ಮ}$.

ಉ. ೨. $\frac{೨ಅಇ^{೨}}{೩ಕ^{೨}ಗ} \times \frac{೬ಕಗ^{೨}}{೫ಅಇಪ} \times \frac{೧೦ಪಬಮ}{ಅಇ} = \frac{೮ಗಬಮ}{ಅಕ}$.

ಉ. ೩. $\dfrac{ಅ^೨-ಕ^೨}{೪ಅಕ}\times\dfrac{೨ಅಕ}{ಅ^೨+ಅಕ}=\dfrac{(ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ)}{೪ಅಕ}\times\dfrac{೨ಅಕ}{ಅ(ಅ+ಕ)}=\dfrac{ಅ-ಕ}{೨ಅ}.$

ಉ. ೪. $\dfrac{ಯ^೨+೪ಯರ+೪ರ^೨}{ಯ^೨-೯ರ^೨}\times\dfrac{ಯ^೨+೬ಯರ+೯ರ^೨}{ಯ^೨-೪ರ^೨}$

$$=\frac{(ಯ+೨ರ)^೨}{(ಯ+೩ರ)(ಯ-೩ರ)}\times\frac{(ಯ+೩ರ)^೨}{(ಯ+೨ರ)(ಯ-೨ರ)}=\frac{(ಯ+೨ರ)(ಯ+೩ರ)}{(ಯ-೩ರ)(ಯ+೨ರ)}.$$

ಉ. ೫. $\dfrac{೧೬ಪ^೪-೫೪ಪಮ^೩}{೮೧ಪ^೩ಮ+೨೪ಮ^೪}\times\dfrac{೮೧ಪ^೨-೩೬ಮ^೨}{೧೬ಪ^೨-೩೬ಮ^೨}$

$$\times\frac{೬ಪ+೯ಮ}{೮ಪ^೨+೧೨ಪಮ+೧೮ಮ^೨}=\frac{೨ಪ(೮ಪ^೩-೨೭ಮ^೩)}{೩ಮ(೨೭ಪ^೩+೮ಮ^೩)}\times\frac{೯(೯ಪ^೨-೪ಮ^೨)}{೪(೪ಪ^೨-೯ಮ^೨)}$$

$$\times\frac{೩(೨ಪ+೩ಮ)}{೨(೪ಪ^೨+೬ಪಮ+೯ಮ^೨)}=\frac{೨ಪ(೨ಪ-೩ಮ)(೪ಪ^೨+೬ಪಮ+೯ಮ^೨)}{೩ಮ(೩ಪ+೨ಮ)(೯ಪ^೨-೬ಪಮ+೪ಮ^೨)}$$

$$\times\frac{೯(೩ಪ+೨ಮ)(೩ಪ-೨ಮ)}{೪(೨ಪ+೩ಮ)(೨ಪ-೩ಮ)}\times\frac{೩(೨ಪ+೩ಮ)}{೨(೪ಪ^೨+೬ಪಮ+೯ಮ^೨)}$$

$$=\frac{೯ಪ(೩ಪ-೨ಮ)}{೪ಮ(೯ಪ^೨-೬ಪಮ+೪ಮ^೨)}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೭.

ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ:

೧. $\dfrac{೪ಕತ}{೯ಗನ}\times\dfrac{೬ಗಬಮ}{೮ಕಪ}.$ ೨. $\dfrac{ಕ}{ಗ}\times\dfrac{ಗ^೨}{ತ^೨}.$ ೩. $\dfrac{೫ಯ^೨}{ರ^೩}\times\dfrac{ರ^೨}{೨ಯ^೩}.$

೪. $\dfrac{ಅಕ}{೪ಗಘ}\times\dfrac{೨ಗಯ}{೩ಕರ}.$ ೫. $\dfrac{ಕಯ}{೩ರಸ}\times\dfrac{೧೫ಯರ}{೨ಕವ}.$ ೬. $\dfrac{ಪ}{ಬ}\times\dfrac{ಬ}{ಮ}\times\dfrac{ಮ}{ಪ}.$

೭. $\dfrac{ಪ^೨}{ಬ^೨}\times\dfrac{ಬ^೨}{ಮ^೨}\times\dfrac{ಮ^೨}{ಪ^೨}.$ ೮. $\dfrac{೪ಪಯ^೩}{೫ಕಕ್ಷ^೩}\times\dfrac{೧೫ಕಕ್ಷ^೨}{೮ಪಯ^೨}.$

೯. $\dfrac{೫ಪ^೨ಬ}{೩ಮಯ^೨}\times\dfrac{೬ಮ^೨ಯ}{೫ಪಬ^೨}.$ ೧೦. $\dfrac{೮ತ^೨}{೩ದ^೨}\times\dfrac{೬ದ^೩}{೫ನ^೩}\times\dfrac{೧೦ನ^೨}{ತದ}.$

೧೧. $\frac{೨ಪ^೨}{೩ಬ^೩} \times \frac{೪ಬ^೨}{೫ಮ^೩} \times \frac{೬ಮ^೨}{ಪ^೩}$. ೧೨. $\frac{ಪ^೩}{ಬಮ} \times \frac{ಬ^೩}{ಪಮ} \times \frac{ಮ^೩}{ಪಬ}$.

೧೩. $\frac{೪ಪ}{೫ಕ} \times \frac{೧೦ಕ^೨}{೩ಗ^೨} \times \frac{೯ಗ^೩}{೮ಫ^೩} \times ೨ಫ^೪$

೧೪. $\frac{ಫ^೪}{೨ಫ^೨ಬ^೨} \times \frac{೨ಫ^೪}{೩ಬ^೨ಮ^೨} \times \frac{೩ಬ^೪}{೪ಮ^೨ಪ^೨} \times \frac{೪ಮ^೪}{೫ಪ^೨ಫ^೨}$.

೧೫. $\frac{ಪ^೨-ಬ^೨}{ಯ^೨-ರ^೨} \times \frac{ಯ^೩-ರ^೩}{ಪ^೩-ಬ^೩}$. ೧೬. $\frac{ಯ+ರ}{ವ+ಸ} \times \frac{ವ^೨-ಸ^೨}{ಯ^೨-ರ^೨}$.

೧೭. $\frac{ಯ^೨+೨ಯರ+ರ^೨}{ಲ^೨-ವ^೨} \times \frac{ಲ^೨-೨ಲವ+ವ^೨}{ಯ^೨-ರ^೨}$.

೧೮. $\frac{ಪ^೨+ಪಬ+ಬ^೨}{ಭ^೨-ಭಮ+ಮ^೨} \times \frac{ಭ^೩+ಮ^೩}{ಪ^೩-ಬ^೩}$. ೧೯. $\frac{ಅ^೨-೨ಅಇ+ಇ^೨}{ಕ^೨+೨ಕಗ+ಗ^೨} \times \frac{ಕ+ಗ}{ಅ-ಇ}$

೨೦. $\frac{ಪ^೨-೨೫ಮ^೨}{೯ಬ^೨-ಭ^೨} \times \frac{೩ಬ-ಭ}{ಪ+೫ಮ}$.

೨೧. $\frac{೪ಅಯ+೮ಅರ}{೯ಇಪ-೧೨ಇಮ} \times \frac{೧೮ಪ^೨-೩೨ಮ^೨}{೫ಯ^೨-೨೦ರ^೨}$.

೨೨. $\frac{೨ಕಪ+೪ಕಮ}{೩ಗಪ-೯ಗಮ} \times \frac{೪ಫಪ-೧೨ಫಮ}{೫ಅಪ+೧೦ಅಮ}$.

೨೩. $\frac{೪ಕ-೫ಗ}{೨ಕ-೩ಗ} \times \frac{೬ಕಪ-೯ಗಪ}{೮ಕ-೧೦ಗ}$.

೨೪. $\frac{೪ಕಗಪ}{೬ಗಪ+೧೫ಗಮ} \times \frac{೧೦ಕಪ+೨೫ಕಮ}{೮ಇಕಮ}$.

೨೫. $\frac{೫ಬ}{೪ಕ^೨+೧೨ಕಗ+೯ಗ^೨} \times \frac{೮ಕಪ+೧೨ಗಪ}{೨೫ಇಬ}$.

೨೬. $\frac{೮ಪ^೩-೨೭ಮ^೩}{೧೬ಯ^೨-೨೦ಯವ+೨೫ವ^೨} \times \frac{೬೪ಯ^೩+೧೨೫ವ^೩}{೮ಪ^೨+೧೨ಪಮ+೧೮ಮ^೨}$.

೨೭. $\frac{ಯ^೨+೮ಯ+೧೫}{ಯ^೨+೫ಯ+೬} \times \frac{ಯ^೨+೩ಯ+೨}{ಯ^೨+೯ಯ+೨೦}$.

೨೮. $\dfrac{೬ಪ^2+೧೩ಪ+೬}{೧೨ಪ^2+೧೭ಪ+೬} \times \dfrac{೨೦ಪ^2+೨೩ಪ+೬}{೮ಪ^2-೬ಪ-೨೭}.$

೨೯. $\dfrac{೨೦ಯ^2-೩ಯರ-೯ರ^2}{೧೦ಯ^2-೧೯ಯರ-೧೫ರ^2} \times \dfrac{೮ಯ^2-೩೪ಯರ+೩೫ರ^2}{೧೬ಯ^2-೪ಯರ-೬ರ^2}.$

೩೦. $\dfrac{೩ಪ^2+೧೬ಪಮ-೩೫ಮ^2}{೧೨ಪ^2-೨ಪಮ-೩೦ಮ^2} \times \dfrac{೮ಪ^2+೬ಪಮ-೯ಮ^2}{೧೪ಪ^2+೯೬ಪಮ-೧೪ಮ^2}.$

೩೧. $\dfrac{೨ನ^2+೨೪ನ+೭೨}{ನ^2+೧೫ನ+೫೬} \times \dfrac{ನ^2+೧೪ನ+೪೯}{೨ನ^2+೨೬ನ+೮೪}.$

೩೨. $\dfrac{೨೪ಯ^2-೫೨ಯ+೨೪}{೨೫ಯ^2-೮೦ಯ+೬೪} \times \dfrac{೨೫ಯ^2-೬೪}{೭೫ಯ^2+೭೦ಯ-೮೦}.$

$\dfrac{೮೦ಯ^2-೩೬ಯವ-೭೨ವ^2}{೮೦ಯ^2-೪೫ವ^2} \times \dfrac{೧೬ಯ^2-೨೪ಯವ+೯ವ^2}{೫೦ಯ^2-೭೨ವ^2}.$

೩೪. $\dfrac{೩ಯವ+೬ಲವ+೪ಯಸ+೮ಲಸ}{೧೮ವ^2+೪೮ವಸ+೩೨ಸ^2} \times \dfrac{೧೮ವ^2-೬ವಸ-೪೦ಸ^2}{೩ಯವ+೫ಯಸ+೬ಲವ+೧೦ಲಸ}.$

$\dfrac{ಪ^3-೮ಮ^3}{ಪ^2+೪ಪಮ+೪ಮ^2} \times \dfrac{ಪ^3+೮ಮ^3}{ಪ^2-೪ಪಮ+೪ಮ^2}$

೩೬. $\dfrac{ಪ^2-೯ಮ^2}{ಪ^3+೨೭ಮ^3} \times \dfrac{ಪ^4+೯ಪ^2ಮ^2+೮೧ಮ^4}{ಪ^3-೨೭ಮ^3}.$

೩೭. $\dfrac{೩೬ಯ^2-೪೯ರ^2}{೩೬ಯ^2+೮೪ಯರ+೪೯ರ^2} \times \dfrac{೩೬ಯ^2-೧೨ಯರ-೬೩ರ^2}{೧೨ಯ^2-೩೨ಯರ+೨೧ರ^2}.$

೩೮. $\dfrac{೨೫ರ^2-೮೧ಲ^2}{೨೫ರ^2-೩೫ರಲ-೧೮ಲ^2} \times \dfrac{೨೫ರ^2-೧೫ರಲ-೫೪ಲ^2}{೨೫ರ^2+೯೦ರಲ+೮೧ಲ^2}.$

೩೯. $\dfrac{೮ಯ^2-೧೪ಯ+೩}{೧೫ಯ^2-೨೬ಯ+೮} \times \dfrac{೩೦ಯ^2-೧೭ಯ+೨}{೪ಯ^2-೧೬ಯ+೧೫} \times \dfrac{೬ಯ^2-೨೩ಯ+೨೦}{೩೨ಯ^2+೪ಯ-೩}.$

೪೦. $\dfrac{೪ಅ^2-೨೫ಪ^2}{೮ಅ^3+ಪ^3} \times \dfrac{೧೬ಅ^4+ಅ^2ಪ^2+ಪ^4}{೪ಅ^2+೨೦ಅಪ+೨೫ಪ^2} \times \dfrac{೪ಅ^2+೧೨ಅಪ+೫ಪ^2}{೮ಅ^3-ಪ^3}.$

೩.

ಭಾಗಾಕಾರ.

೧೦·೮. ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು **ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದು** ಅಂದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ **ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದಿಂದ ಗುಣಿಸುವಂತೆಯೇ** ಇರುತ್ತದೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{೧}{೩}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದೆಂದರೆ ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವಂತೆಯೇ ಸರಿ, ಇಲ್ಲವೆ $\frac{೪}{೭}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದೆಂದರೆ $\frac{೭}{೪}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವಂತೆಯೇ ಸರಿ.

$\frac{೨}{೩} \div \frac{೧}{೪} = \frac{೨}{೩} \times \frac{೪}{೧} = \frac{೮}{೩}$, $\frac{೩}{೫} \div \frac{೭}{೯} = \frac{೩}{೫} \times \frac{೯}{೭} = \frac{೨೭}{೩೫}$.

ಇದರಂತೆಯೇ $\frac{ಅ}{ಕ} \div \frac{ಪ}{ಮ} = \frac{ಅ}{ಕ} \times \frac{ಮ}{ಪ} \times \frac{ಅಮ}{ಕಪ}$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆ. $\frac{ಅ}{ಕ} \div \frac{ಪ}{ಮ}$ ಎಂದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $\frac{ಪ}{ಮ}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಉತ್ತರವು $\frac{ಅ}{ಕ}$ ಬರುವದೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಈಗ $\frac{ಅ}{ಕ} \times \frac{ಮ}{ಪ}$ ಎಂದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $\frac{ಪ}{ಮ}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಾಕಾರವು $\frac{ಅ}{ಕ}$ ಬರುವದೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು. ಈ ಸಂಗತಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮುಂದಿನಂತೆಯೂ ಮಾಡಬಹುದು. $೧ \div \frac{೧}{೩}$ ಅಂದರೆ ೧ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $\frac{೧}{೩}$ ದಷ್ಟು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? ೧×೩. ಮತ್ತು ೨ರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? ೨×೩. ಮತ್ತು ೪ರಲ್ಲಿ ೪×೩. ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟು ಭಾಗವನ್ನು ಮಾಡುವದಿರದೆ ಅದರ ಇಮ್ಮಡಿ ಅಂದರೆ $\frac{೨}{೩}$ ದಷ್ಟು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುವದು. ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೧ \times ೩}{೨}$, $\frac{೨ \times ೩}{೨}$, $\frac{೩ \times ೩}{೨}$ ಇಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? ಅಂದರೆಯೇ $೧ \div \frac{೨}{೩} = ೧ \times \frac{೩}{೨}$; $೨ \div \frac{೨}{೩} = ೨ \times \frac{೩}{೨}$; $೩ \div \frac{೨}{೩} = ೩ \times \frac{೩}{೨}$. ಅದರಂತೆಯೇ $೧ \div \frac{೧}{ಮ}$ ಅಂದರೆ ೧ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $\frac{೧}{ಮ}$ ದಷ್ಟು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? $೧ \times$ **ಮ** ಮತ್ತು ೨ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೨ **ಮ**, **ಅ** ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ **ಅಮ** ಮತ್ತು $\frac{ಅ}{ಕ}$ ದಲ್ಲಿ $\frac{ಅಮ}{ಕ}$.

ಆದರೆ ಭಾಗವು $\frac{೧}{\text{ಮ}}$ ದಷ್ಟು ಇರದೆ $\frac{\text{ಪ}}{\text{ಮ}}$ ದಷ್ಟು ಅಂದರೆ ಅದರ **ಪ** ಪಟ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುವವು? $\frac{\text{ಅಮ}}{\text{ಕ}} \div \text{ಪ}$ ಅಂದರೆ $\frac{\text{ಅಮ}}{\text{ಕಪ}}$.

ಆದುದರಿಂದ $\frac{\text{ಅ}}{\text{ಕ}} \div \frac{\text{ಪ}}{\text{ಮ}} = \frac{\text{ಅ}}{\text{ಕ}} \times \frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}}$.

ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೀಗೆ ಸಹ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು. $\frac{\text{ಅ}}{\text{ಕ}}$ಕ್ಕೆ **ಪ** ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು $\frac{\text{ಅ}}{\text{ಕಪ}}$ ಬರುವದು. ಆದರೆ ನಮಗೆ **ಪ** ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದಿರದೆ **ಪ** ದಲ್ಲಿಯ **ಮ** ಭಾಗದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದಿಡೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಭಾಗಾಕಾರವು $\frac{\text{ಅ}}{\text{ಕಪ}}$ ದ **ಮ** ಪಟ್ಟಿದೆ. ಅಂದರೆ $\frac{\text{ಅಮ}}{\text{ಕಮ}}$ ಬರುವದು.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕ ಸಂಗತಿಯೇನಂದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಯಾವುದೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅದರ **ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದಿಂದ** ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಕೆಳಗೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಯಾವದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ತಿರುವಿ ಇಟ್ಟು, ಅಂದರೆ ಅಂಶದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಛೇದವನ್ನು ಮತ್ತು ಛೇದದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅಂಶವನ್ನು ಬರೆದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಮೊದಲನೆಯದರ **ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವು** ಇರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{೩}{೪}$, ೫, $\frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}}$, $\frac{೧}{\text{ಯ}}$ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೪}{೩}$, $\frac{೧}{೫}$, $\frac{\text{ಪ}}{\text{ಮ}}$, ಯ ಇವುಗಳ **ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳಿರುತ್ತವೆ.** ಯಾವದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ **ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ**, ಇವುಗಳ **ಗುಣಾಕಾರವು** ಯಾವಾಗಲೂ ೧ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೧. $\frac{\text{೪ಪಮ}}{\text{೩ಅಕ}} \div \frac{\text{೮ಪಮ}^{೨}}{\text{೯ಅ}^{೨}\text{ಕ}} = \frac{\text{೪ಪಮ}}{\text{೩ಅಕ}} \times \frac{\text{೯ಅ}^{೨}\text{ಕ}}{\text{೮ಪಮ}^{೨}} = \frac{\text{೩ಅ}}{\text{೨ಮ}}$.

ಉ. ೨. $\frac{\text{೫೦ಪ}^{೨} - \text{೯೮ಮ}^{೨}}{\text{೩ಪ}^{೨} + \text{೨೪ಪಮ} + \text{೪೮ಮ}^{೨}} \div \frac{\text{೨೫ಪ}^{೨} - \text{೭೦ಪಮ} + \text{೪೯ಮ}^{೨}}{\text{೧೦ಪ}^{೨} + \text{೨೬ಪಮ} - \text{೫೬ಮ}^{೨}}$

$$= \frac{೫೦ಪ^{2} - ೯೮ಮ^{2}}{೩ಪ^{2}+೨೪ಪಮ+೪೮ಮ^{2}} \times \frac{೧೦ಪ^{2}+೨೬ಪಮ-೫೬ಮ^{2}}{೨೫ಪ^{2}-೭೦ಪಮ+೪೯ಮ^{2}}$$

$$= \frac{೨(೨೫ಪ^{2}-೪೯ಮ^{2})}{೩(ಪ^{2}+೮ಪಮ+೧೬ಮ^{2})} \times \frac{೨(೫ಪ^{2}+೧೩ಪಮ-೨೮ಮ^{2})}{೨೫ಪ^{2}-೭೦ಪಮ+೪೯ಮ^{2}}$$

$$= \frac{೨(೫ಪ+೭ಮ)(೫ಪ-೭ಮ)}{೩(ಪ+೪ಮ)^{2}} \times \frac{೨(೫ಪ-೭ಮ)(ಪ+೪ಮ)}{(೫ಪ-೭ಮ)^{2}}$$

$$= \frac{೪(೫ಪ+೭ಮ)}{೩(ಪ+೪ಮ)}.$$

ಉ. ೩. $\frac{೨೫೬ಯ^{4}-೮೧ವ^{4}}{೬೪ಯ^{3}-೨೭ವ^{3}} \div \frac{೬೪ಯ^{3}+೨೭ವ^{3}}{೨೫೬ಯ^{4}+೧೪೪ಯ^{2}ವ^{2}+೮೧ವ^{4}}$

$$= \frac{೨೫೬ಯ^{4}-೮೧ವ^{4}}{೬೪ಯ^{3}-೨೭ವ^{3}} \times \frac{೨೫೬ಯ^{4}+೧೪೪ಯ^{2}ವ^{2}+೮೧ವ^{4}}{೬೪ಯ^{3}+೨೭ವ^{3}}$$

$$= \frac{(೧೬ಯ^{2}+೯ವ^{2})(೪ಯ+೩ವ)(೪ಯ-೩ವ)}{(೪ಯ-೩ವ)(೧೬ಯ^{2}+೧೨ಯವ+೯ವ^{2})}$$

$$\times \frac{(೧೬ಯ^{2}+೧೨ಯವ+೯ವ^{2})(೧೬ಯ^{2}-೧೨ಯವ+೯ವ^{2})}{(೪ಯ+೩ವ)(೧೬ಯ^{2}-೧೨ಯವ+೯ವ^{2})}$$

$$= ೧೬ಯ^{2} + ೯ವ^{2}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ:

೧. $\frac{೪ಅ^{3}ಇ}{೯ಯ^{2}ರ} \div \frac{೮ಅಇ^{3}}{೩ಯರ^{2}}$.

೨. $\frac{೫ಅಯರ}{೬ಕಲವ} \div \frac{೨೦ಅ^{2}ಯರ^{2}}{೩೩ಕಲ^{2}ವ}$.

೩. $\frac{೨೪ಪ^{3}ಬ^{4}}{೨೫ಮ^{2}ಯ^{3}} \div \frac{೩೬ಪ^{4}ಬ^{3}}{೩೫ಮ^{3}ಯ^{2}}$.

೪. $\frac{೮ಅಯವ}{೧೫ಗಪ^{2}ಮ^{2}} \div \frac{೧೬ಅ^{2}ಯವ^{2}}{೨೫ಗಪ^{3}ಮ^{2}}$.

೫. $\frac{೭ಅಯರ^{2}}{೯ಪ^{2}ಬಮ^{3}} \div \frac{೨೧ಅ^{2}ಯರ}{೨ಪ^{3}ಬಮ^{2}}$.

೬. $\frac{೨೮ಯರ^{2}ಲ}{೩ಪ^{4}ಬಮ^{3}} \div \frac{೪೨ಯ^{2}ರಲ^{3}}{೫ಪ^{3}ಬ^{2}ಮ^{3}}$.

೭. $\frac{೪ಪ+೪ಬ}{೯ಯ+೧೮ರ} \div \frac{೩ಪ+೩ಬ}{೧೦ಯ+೨೦ರ}$.

೮. $\frac{೫ಯ+೧೫ರ}{೩ಪ+೧೨ಮ} \div \frac{೪ಅಯ+೧೨ಅರ}{೫ಕಪ+೨೦ಕಮ}$.

೯. $\frac{೧೬ಅಯ-೨೪ಅವ}{೩೬ಕಯ-೨೪ಕವ} \div \frac{೮ಯ-೧೨ವ}{೨೭ಯ-೧೮ವ}.$

೧೦. $\frac{೧೦ಯ^೨-೨೫ಯವ}{೨೧ಯವ+೨೮ವ^೨} \div \frac{೩೦ಯ^೨-೪೦ಯವ}{೪೨ಯವ+೫೬ವ^೨}.$

೧೧. $\frac{ಪ^೨-೨೫ಬ^೨}{೧೬ಪ^೨-೨೫ಮ^೨} \div \frac{೨ಪ^೨+೧೦ಪಬ}{೮ಪಮ-೧೦ಮ^೨}.$

೧೨. $\frac{೪ಯ^೨-೯ರ^೨}{೪ಯ^೨-೧೨ಯರ+೯ರ^೨} \div \frac{೪ಯ^೨+೧೨ಯರ+೯ರ^೨}{೪ಯ^೨-೪ಯರ-೩ರ^೨}.$

೧೩. $\frac{೧೬ಪ^೪-೭೨ಪ^೨ರ^೨+೮೧ರ^೪}{೮ಪ^೨+೧೮ಪರ+೯ರ^೨} \div \frac{೮ಪ^೨-೨೪ಪರ+೧೮ರ^೨}{೧೨ಪ+೯ರ}.$

೧೪. $\frac{ಯ^೩-೨೭ಲ^೩}{ಯ^೩-೬೪ಲ^೩} \div \frac{ಯ^೨-೯ಲ^೨}{ಯ^೨-೧೬ಲ^೨}.$

೧೫. $\frac{೨ಪ^೨-೩೨ಪಮ+೧೨೮ಮ^೨}{ಪ^೨-೧೧ಪಮ+೨೪ಮ^೨} \div \frac{ಪ^೨-೬೪ಮ^೨}{ಪ^೨+೧೬ಪಮ+೬೪ಮ^೨}.$

೧೬. $\frac{೩೨ಯ^೨-೨೮ಯ+೩}{೩೨ಯ^೨-೩೬ಯ-೫} \div \frac{೧೬ಯ^೨+೬ಯ-೧}{೧೬ಯ^೨-೬ಯ-೧}.$

೧೭. $\frac{೧೪ಪ^೨+೧೯ಪ-೩}{೧೬ಪ^೨+೨೨ಪ-೩} \div \frac{೪೦ಪ^೨+೫೨ಪ-೧೨}{೪೦ಪ^೨-೧೩ಪ+೧}.$

೧೮. $\frac{೯ಯ^೪-೧೬ವ^೪}{೯ಯ^೪+೨೪ಯ^೨ವ^೨+೧೬ವ^೪} \div \frac{೯ಯ^೪-೨೪ಯ^೨ವ^೨+೧೬ವ^೪}{೧೫ಅಯ^೨+೨೦ಅವ^೨}.$

೧೯. $\frac{ಅಪ+೨ಕಪ+೪ಅಮ+೮ಕಮ}{೮ಅ^೨+೩೨ಅಕ+೩೨ಕ^೨} \div \frac{೪ಪ^೨-೬೪ಮ^೨}{ಅಪ-೪ಅಮ+೨ಕಪ-೮ಕಮ}.$

೨೦. $\frac{೮ಪ^೩-೧೨೫ಮ^೩}{೪ಪ^೨-೩ಪಮ-ಮ^೨} \div \frac{೧೬ಪ^೨-೧೦೦ಮ^೨}{೮ಪ^೨-೧೨ಪಮ-೨೦ಮ^೨}.$

೨೧. $\frac{೯ಯ^೨+೩ಯರ-೨ರ^೨}{೧೫ಯ^೨+ಯರ-೨ರ^೨} \div \frac{೧೨ಯ^೨+೫ಯರ-೨ರ^೨}{೧೦ಯ^೨+೯ಯರ+೨ರ^೨}.$

೨೨. $\frac{೮ಅ^೨-೪೦ಅ+೪೮}{೯ಅ^೨-೬೩ಅ+೧೦೮} \div \frac{೮ಅ^೨-೨೪ಅ+೧೬}{೯ಅ^೨-೯}$

೨೩. $\frac{೨ಪಯ^{೨}-೧೪ಪಯ+೨೪ಪ}{೪ಮಯ^{೨}-೧೨ಮಯ-೧೬ಮ} \div \frac{೩ಗಯ^{೨}-೩ಗಯ-೧೮ಗ}{೯ನಯ^{೨}+೨೭ನಯ+೧೮ನ}.$

೨೪. $\frac{೪ರ^{೩}-೪೦ರ^{೨}+೬೪ರ}{೩ರ^{೩}+೧೫ರ^{೨}-೪೨ರ} \div \frac{೨ರ^{೩}-೨೪ರ^{೨}+೬೪ರ}{೩ರ^{೩}+೨೪ರ^{೨}+೨೧ರ}.$

೨೫. $\frac{೮ಮ^{೩}-೨೭}{೪ಮ^{೨}+೧೨ಮ+೯} \div \frac{೧೬ಮ^{೪}+೩೬ಮ^{೨}+೮೧}{೮ಮ^{೩}+೨೭}.$

೪.
ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ

೧೦·೯. $\frac{೭}{೧೨}+\frac{೪}{೧೨}$ ಈ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವದಾದರೆ ಅದನ್ನು $\frac{೭+೪}{೧೨}$ ಅಂದರೆ $\frac{೧೧}{೧೨}$ ಎಂದು, ಮತ್ತು $\frac{೭}{೧೨}-\frac{೪}{೧೨}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವ-ದಾದರೆ ಅದನ್ನು $\frac{೭-೪}{೧೨}$ ಅಂದರೆ $\frac{೩}{೧೨}$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದ-ರಂತೆಯೇ $\frac{ಅ}{೧೨}+\frac{ಕ}{೧೨}$ ಈ ಬೇರೀಜನ್ನು $\frac{ಅ+ಕ}{೧೨}$ ಎಂದು ಮತ್ತು $\frac{ಅ}{೧೨}-\frac{ಕ}{೧೨}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು $\frac{ಅ-ಕ}{೧೨}$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುವೆವು. ಮತ್ತು $\frac{ಅ}{ಪ}+\frac{ಕ}{ಪ}$ ಈ ಬೇರೀಜನ್ನು $\frac{ಅ+ಕ}{ಪ}$ ಎಂದು ಮತ್ತು $\frac{ಅ}{ಪ}-\frac{ಕ}{ಪ}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು $\frac{ಅ-ಕ}{ಪ}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸಹಜಸಿದ್ಧವಿರುವದು. ೧ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೧೨ ಸರಿಯಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದರೆ $\frac{೧}{೧೨}$ ಮತ್ತು **ಪ** ಸರಿಯಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದರೆ $\frac{೧}{ಪ}$. ಈ **ಪ** ಭಾಗಗಳೊಳಗಿನ ಅ ಭಾಗಗಳೆಂದರೆ $\frac{ಅ}{ಪ}$, ಮತ್ತು ಕ ಭಾಗಗಳೆಂದರೆ $\frac{ಕ}{ಪ}$. ಈಗ **ಅ** ಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು **ಕ** ಭಾಗಗಳು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು **ಅ+ಕ** ಭಾಗಗಳು ಅಂದರೆ $\frac{ಅ+ಕ}{ಪ}$, ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ **ಅ−ಕ** ಭಾಗಗಳು ಅಂದರೆ $\frac{ಅ-ಕ}{ಪ}$.

ಇದರಂತೆಯೇ $\frac{೩}{೮}+\frac{೫}{೮}+\frac{೧}{೮}=\frac{೩+೫+೧}{೮}=\frac{೯}{೮}$; $\frac{೩}{೮}+\frac{೫}{೮}-\frac{೧}{೮}\ \frac{೩+೫-೧}{೮}=\frac{೭}{೮}$;

$$\frac{ಅ}{ಪ}+\frac{ಕ}{ಪ}+\frac{ದ}{ಪ}=\frac{ಅ+ಕ+ದ}{ಪ};\quad \frac{ಅ}{ಪ}+\frac{ಕ}{ಪ}-\frac{ದ}{ಪ}=\frac{ಅ+ಕ-ದ}{ಪ}.$$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡುವದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು **ಸಮುಚ್ಛೇದ** (ಛೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯುಳ್ಳವು) ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $\frac{೩}{೪}+\frac{೨}{೩}$ ಈ ಬೇರೀಜನ್ನು ಅಥವಾ $\frac{೩}{೪}-\frac{೨}{೩}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ? ಮೊದಲು ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು **ಸಮುಚ್ಛೇದವಾಗುವಂತೆ** ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. $\frac{೩}{೪}$ ಮತ್ತು $\frac{೨}{೩}$ ಇವುಗಳ ಛೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ೪ ಮತ್ತು ೩ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೧೨** ಇರುತ್ತದೆ. ಇದು **ಲಘುತ್ತಮ ಸಮುಚ್ಛೇದ.** $\frac{೩}{೪}$ ಮತ್ತು $\frac{೨}{೩}$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಿರುವ ಮತ್ತು ಛೇದವು ೧೨ ಇರುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆಯೇ $\frac{೩}{೪}$ ಮತ್ತು $\frac{೨}{೩}$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸದೆ ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅನುಕೂಲವಿರುವ **(ಸಮುಚ್ಛೇದ)** ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\frac{೩}{೪}=\frac{೩\times೩}{೪\times೩}=\frac{೯}{೧೨};\quad \frac{೨}{೩}=\frac{೨\times೪}{೩\times೪}=\frac{೮}{೧೨}.$$

$$\therefore \frac{೩}{೪}+\frac{೨}{೩}=\frac{೯}{೧೨}+\frac{೮}{೧೨}=\frac{೯+೮}{೧೨}=\frac{೧೭}{೧೨} \text{ ಮತ್ತು}$$

$$\frac{೩}{೪}-\frac{೨}{೩}=\frac{೯}{೧೨}-\frac{೮}{೧೨}=\frac{೯-೮}{೧೨}=\frac{೧}{೧೨}.$$

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು **ಪ. ೧೦·೨** ರಲ್ಲಿ ವಿಶದಪಡಿಸಿದ **ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ಅದೇ ಇರುತ್ತದೆ, ಕೇವಲ ಸ್ವರೂಪವು ಬದಲಿಸುತ್ತದೆಂಬ** ಸಂಗತಿಯ ಸಹಾಯವನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

೧೦·೧೦. ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ

ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ **ಬೇರೀಜು** ಅಥವಾ **ವಜಾಬಾಕಿ** ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬರಬೇಕಾದರೆ ನಮಗೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ-ಗಳನ್ನು **ಸಮಚ್ಛೇದ** ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರಬೇಕು. ಉದಾ-ಹರಣೆಗಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ **ಸಮಚ್ಛೇದರೂಪ-ವನ್ನು** ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $\frac{ಯ}{೪}, \frac{ರ}{೫}.$ ೪ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ **ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೨೦.** ಆದುದರಿಂದ **ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ೨೦.** $\frac{ಯ}{೪} = \frac{ಯ \times ೫}{೪ \times ೫} = \frac{೫ಯ}{೨೦};$ $\frac{ರ}{೫} = \frac{ರ \times ೪}{೫ \times ೪} = \frac{೪ರ}{೨೦}.$

ಛೇದವು **೨೦** ಬರಲು **ಅಂಶ** ಮತ್ತು **ಛೇದಗಳಿಗೆ** ಮೊದಲನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ೫ರಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ೪ರಿಂದ ಗುಣಿಸ-ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ. ೨. $\frac{ಯ}{೬}, \frac{೨ರ}{೯}, \frac{೩ವ}{೮}.$ ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ **ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ೭೨** ಇರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ **ಅಂಶ** ಮತ್ತು **ಛೇದ** ಇವುಗಳಿಗೆ **ಅವಶ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ** $\frac{ಯ}{೬} = \frac{ಯ \times ೧೨}{೬ \times ೧೨}$ $= \frac{೧೨ಯ}{೭೨};$ $\frac{೨ರ}{೯} = \frac{೨ರ \times ೮}{೯ \times ೮} = \frac{೧೬ರ}{೭೨};$ $\frac{೩ವ}{೮} = \frac{೩ವ \times ೯}{೮ \times ೯} = \frac{೨೭ವ}{೭೨}.$

ಉ. ೩. $\frac{ಯ}{ಪ}, \frac{ರ}{ಬ}, \frac{ಲ}{ಮ}.$ ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಪಬಮ ಇದು **ಲಘುತ್ತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ.** ಆದುದರಿಂದ, $\frac{ಯ}{ಪ} = \frac{ಯ \times ಬಮ}{ಪ \times ಬಮ} = \frac{ಬಮಯ}{ಪಬಮ};$

$$\frac{ರ}{ಬ} = \frac{ರ \times ಪಮ}{ಬ \times ಪಮ} = \frac{ಪಮರ}{ಪಬಮ}; \quad \frac{ಲ}{ಮ} = \frac{ಲ \times ಪಬ}{ಮ \times ಪಬ} = \frac{ಪಬಲ}{ಪಬಮ}.$$

ಉ. ೪. $\frac{೨ಯ}{ಬಮ}, \frac{೩ರ}{ಪಮ}, \frac{೫ಸ}{ಪಬ}.$ ಪಬಮ ಇದು **ಲಘುತ್ತಮ ಸಮ-**

ಚ್ಛೇದವು. ಆದುದರಿಂದ, $\frac{೨ಯ}{ಬಮ}=\frac{೨ಯ\times ಪ}{ಬಮ\times ಪ}=\frac{೨ಪಯ}{ಪಬಮ};\ \frac{೩ರ}{ಪಮ}=\frac{೩ರ\times ಬ}{ಪಮ\times ಬ}$

$=\frac{೩ಬರ}{ಪಬಮ};\ \frac{೫ಸ}{ಪಬ}=\frac{೫ಸ\times ಮ}{ಪಬ\times ಮ}=\frac{೫ಮಸ}{ಪಬಮ}.$

ಉ. ೫. $\frac{೮ಯ}{೫ಪ}, \frac{೪ರ}{೧೫ಬ}, \frac{೩ವ}{೨೦ಮ}$. ಇಲ್ಲಿ ೬೦ ಪಬಮ ಇದು **ಲಘುತ್ತಮ ಸಮುಚ್ಛೇದವು.** ಆದುದರಿಂದ, $\frac{೮ಯ}{೫ಪ}=\frac{೮ಯ\times೧೨ಬಮ}{೫ಪ\times೧೨ಬಮ}=\frac{೯೬ಬಮಯ}{೬೦ಪಬಮ}$;

$\frac{೪ರ}{೧೫ಬ}=\frac{೪ರ\times೪ಪಮ}{೧೫ಬ\times೪ಪಮ}=\frac{೧೬ಪಮರ}{೬೦ಪಬಮ};\ \frac{೩ವ}{೨೦ಮ}=\frac{೩ವ\times೩ಪಬ}{೨೦ಮ\times೩ಪಬ}=\frac{೯ಪಬವ}{೬೦ಪಬಮ}.$

ಉ. ೬. $\frac{ಯ}{ಅ}, \frac{ರ}{ಕ}, \frac{ಲ}{ಅ+ಕ}, \frac{ವ}{ಅ-ಕ}, \frac{ಸ}{ಅ^೨-ಕ^೨}$. ಇಲ್ಲಿ $ಅಕ(ಅ^೨-ಕ^೨)$ ಇದು **ಲಘುತ್ತಮ ಸಮುಚ್ಛೇದವು.** ಆದುದರಿಂದ, $\frac{ಯ}{ಅ}=\frac{ಯಕ(ಅ^೨-ಕ^೨)}{ಅಕ(ಅ^೨-ಕ^೨)}$;

$\frac{ರ}{ಕ}=\frac{ರಅ(ಅ^೨-ಕ^೨)}{ಅಕ(ಅ^೨-ಕ^೨)};\ \frac{ಲ}{ಅ+ಕ}=\frac{ಲಅಕ(ಅ-ಕ)}{ಅಕ(ಅ^೨-ಕ^೨)};\ \frac{ವ}{ಅ-ಕ}=\frac{ವಅಕ(ಅ+ಕ)}{ಅಕ(ಅ^೨-ಕ^೨)};$

$\frac{ಸ}{ಅ^೨-ಕ^೨}=\frac{ಅಕಸ}{ಅ^೨-ಕ^೨}.$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೯.

ಲಘುತ್ತಮಸಮುಚ್ಛೇದರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ. ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸ-ತಕ್ಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

೧. $\frac{೫ಯ}{೮}, \frac{೩ರ}{೨೦}$. ೨. $\frac{೪ಯ}{೯}, \frac{೩ಯ}{೪}$. ೩. $\frac{೨ರ}{೫}, \frac{೪ರ}{೩}$.

೪. $\frac{೮ರ}{೯}, \frac{೪ಸ}{೧೫}$. ೫. $\frac{೪ಲ}{೭}, \frac{೫ವ}{೬}$. ೬. $\frac{೩ಯ}{೪}, \frac{೫ರ}{೬}, \frac{೩ವ}{೩}$.

೭. $\frac{೨ಅ}{೫}, \frac{೩ಇ}{೧೦}, \frac{೪ಕ}{೧೫}$. ೮. $\frac{೯ಪ}{೧೦}, \frac{೭ಬ}{೨೦}, \frac{೫ಮ}{೬}$. ೯. $\frac{೨ತ}{೭}, \frac{೪ದ}{೨೧}, \frac{೮ನ}{೧೫}$.

೧೦. $\frac{೨ಯ}{ಪ}, \frac{೭ಪ}{ಮ}.$ ೧೧. $\frac{೪ಯ}{ಫ}, \frac{೩ಪ}{೨ಮ}.$ ೧೨. $\frac{೮ಯ}{೩ಪ}, \frac{೫ಯ}{೬ಬ}.$

೧೩. $\frac{೪ಪ}{೩ಅ}, \frac{೩ಮ}{೫ಕ}.$ ೧೪. $\frac{೨ಬ}{೭ಕ}, \frac{೫ಮ}{೨೧ಗ}.$ ೧೫. $\frac{೪ಕ}{ಪ}, \frac{೫ಗ}{ಬ}, \frac{೭ಫ}{ಮ}.$

೧೬. $\frac{೩ಯ}{ಬಮ}, \frac{೮ರ}{ಪಮ}, \frac{೯ಲ}{೪ಪ}.$ ೧೭. $\frac{೯ಯ}{೪ಪ}, \frac{೩ರ}{೧೦ಬ}, \frac{೪ಲ}{೩ಮ}.$

೧೮. $\frac{೨ಅ}{೩ಬಮ}, \frac{೩ಕ}{೪ಪಮ}, \frac{೪ಗ}{೫ಪಬ}.$ ೧೯. $\frac{೧}{ಯ+೧}, \frac{೧}{ಯ-೧}.$

೨೦. $\frac{೪}{ರ+೪}, \frac{೬}{ರ-೪}.$ ೨೧. $\frac{೮}{ಯ+೫}, \frac{೩}{ಯ^{೨}+೧೦ಯ+೨೫}$

೨೨. $\frac{೭}{ಯ+ರ}, \frac{೧೦}{ಯ^{೨}-ರ^{೨}}.$ ೨೩. $\frac{ಕ}{ಯ^{೨}+೨ಯರ+ರ^{೨}}, \frac{೩ಕ}{ಯ^{೨}-ರ^{೨}}.$

೨೪. $\frac{೫ಪ}{ಯ^{೨}-೨ಯವ+ವ^{೨}}, \frac{೬ಪ^{೨}}{ಯ^{೨}-ವ^{೨}}.$

೨೫. $\frac{ಅ}{೫ಯ+೭ಲ}, \frac{೩ಅ}{೨೫ಯ^{೨}-೪೯ಲ^{೨}}.$

೨೬. $\frac{೪ಅ}{೩ಪ-ಮ}, \frac{೨ಅ^{೨}}{೯ಪ^{೨}-ಮ^{೨}}, \frac{೮ಅ^{೩}}{೨೭ಪ^{೩}-ಮ^{೩}}.$

೨೭. $\frac{೮ಕ}{೨ಪ+೫ಮ}, \frac{೪ಕ^{೨}}{೪ಪ^{೨}+೨೦ಪಮ+೨೫ಮ^{೨}}, \frac{}{೮ಪ^{೩}+೧೨೫ಮ^{೩}}.$

೨೮. $\frac{}{ಯ^{೨}+೯ಯ+೨೦}, \frac{}{ಯ^{೨}+೭ಯ+೧೨}.$

೨೯. $\frac{೩ಯ}{೨ಯ^{೨}+೨ಯ-೧೨}, \frac{೨ಯ}{೩ಯ^{೨}-೩ಯ-೩೬}, \frac{೮ಯ}{೬ಯ^{೨}-೩೬ಯ+೪೮}.$

೩೦. $\frac{೨ಯ^{೨}}{೮ಯ^{೨}-೬ಯವ-೩೫ವ^{೨}}, \frac{೩ಯವ}{೧೬ಯ^{೨}-೪೯ವ^{೨}}, \frac{ವ^{೨}}{೮ಯ^{೨}-೩೪ಯವ+೩೫ವ^{೨}}.$

ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು **ಸಮಾನ** ಇರುತ್ತವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು **ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ** (ತಿರುವ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡುವದರಿಂದ) ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವಶ್ಯವೆನಿಸಿದರೆ **ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ** ತಾಳೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $\frac{೩}{೫}=\frac{೯}{೧೫}$, $\frac{೨}{ಪ}=\frac{೧೦}{೫ಪ}$, $\frac{ಯ}{ರ}=\frac{ಅಯ}{ಅರ}$ ಈ **ಸಮಾನವಾದ** ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ **ವಜ್ರಗುಣನದಿಂದ** ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸಮಾನವಿರುವದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಬೇರೆ ಯಾವದೇ **ಸಮಾನ** ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸಹ ಇದೇ ಕಂಡುಬರುವದು. ಕಾರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

೧೦·೧೧. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು **ಸಮುಚ್ಛೇದ** ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದು ತಿಳಿದನಂತರ ಅವುಗಳ **ಬೇರೀಜು** ಅಥವಾ **ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು** ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದರೆ ತಿಳಿಯುವದು.

ಉ. ೧. $\frac{೪}{ಅ}+\frac{೩}{೫ಅ}$. ಇಲ್ಲಿ **ಲ. ಸಮುಚ್ಛೇದ** ೫ಅ, ಮತ್ತು $\frac{೪}{ಅ}=\frac{೨೦}{೫ಅ}$.

$$\therefore \frac{೪}{ಅ}+\frac{೩}{೫ಅ}=\frac{೨೦}{೫ಅ}+\frac{೩}{೫ಅ}=\frac{೨೦+೩}{೫ಅ}=\frac{೨೩}{೫ಅ}.$$

ಉ. ೨. $\frac{ಪ}{೪}+\frac{೨ಪ+೧}{೮}+\frac{೬ಪ-೫}{೧೨}$. ಇಲ್ಲಿ **ಲ. ಸಮುಚ್ಛೇದ** ೨೪ ಮತ್ತು

$\frac{ಪ}{೪}=\frac{೬ಪ}{೨೪}$, $\frac{೨ಪ+೧}{೮}=\frac{೩(೨ಪ+೧)}{೨೪}$, ಮತ್ತು $\frac{೬ಪ-೫}{೧೨}=\frac{೨(೬ಪ-೫)}{೨೪}$.

$$\therefore \frac{ಪ}{೪}+\frac{೨ಪ+೧}{೮}+\frac{೬ಪ-೫}{೧೨}=\frac{೬ಪ}{೨೪}+\frac{೩(೨ಪ+೧)}{೨೪}+\frac{೨(೬ಪ-೫)}{೨೪}.$$

$$=\frac{೬ಪ+೩(೨ಪ+೧)+೨(೬ಪ-೫)}{೨೪}$$

$$=\frac{೬ಪ+೬ಪ+೩+೧೨ಪ-೧೦}{೨೪}$$

$$=\frac{೨೪ಪ-೭}{೨೪}.$$

ಉ. ೩. $\frac{\text{ಪ}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}}+\frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}-\text{ಮ}}$. $(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})$ ಇದು **ಲ. ಸಮುಚ್ಛೇದವು.** ಆದುದರಿಂದ,

$$\frac{\text{ಪ}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}}+\frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}-\text{ಮ}}=\frac{\text{ಪ}(\text{ಪ}-\text{ಮ})}{(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})}+\frac{\text{ಮ}(\text{ಪ}+\text{ಮ})^{*}}{(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})}$$

$$=\frac{\text{ಪ}(\text{ಪ}-\text{ಮ})+\text{ಮ}(\text{ಪ}+\text{ಮ})}{(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})}$$

$$=\frac{\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{ಪಮ}+\text{ಪಮ}+\text{ಮ}^{\text{೨}}}{(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})}$$

$$=\frac{\text{ಪ}^{\text{೨}}+\text{ಮ}^{\text{೨}}}{\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{ಮ}^{\text{೨}}}.$$

ಉ. ೪. $\frac{\text{ಯ}-\text{ವ}}{\text{ಯ}+\text{ವ}}+\frac{\text{ಯ}+\text{ವ}}{\text{ಯ}-\text{ವ}}-\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{ವ}^{\text{೨}}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ವ}^{\text{೨}}}$. $(\text{ಯ}+\text{ವ})(\text{ಯ}-\text{ವ})$ ಇದು **ಲ. ಸಮುಚ್ಛೇದವು.** ಆದುದರಿಂದ,

$$\frac{\text{ಯ}-\text{ವ}}{\text{ಯ}+\text{ವ}}+\frac{\text{ಯ}+\text{ವ}}{\text{ಯ}-\text{ವ}}-\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{ವ}^{\text{೨}}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ವ}^{\text{೨}}}=\frac{(\text{ಯ}-\text{ವ})^{\text{೨}}+(\text{ಯ}+\text{ವ})^{\text{೨}}-(\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{ವ}^{\text{೨}})}{(\text{ಯ}+\text{ವ})(\text{ಯ}-\text{ವ})}$$

$$=\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೨ಯವ}+\text{ವ}^{\text{೨}}+\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೨ಯವ}+\text{ವ}^{\text{೨}}-\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ವ}^{\text{೨}}}{(\text{ಯ}+\text{ವ})(\text{ಯ}-\text{ವ})}$$

$$=\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{ವ}^{\text{೨}}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{ವ}^{\text{೨}}}.$$

ಉ. ೫. $\frac{\text{೨ರ}-\text{೫ಸ}}{\text{೨ರ}+\text{೫ಸ}}+\frac{\text{೨ರ}+\text{೫ಸ}}{\text{೨ರ}-\text{೫ಸ}}-\frac{\text{೪೦ರಸ}}{\text{೪ರ}^{\text{೨}}-\text{೨೫ಸ}^{\text{೨}}}$

$$=\frac{(\text{೨ರ}-\text{೫ಸ})^{\text{೨}}+(\text{೨ರ}+\text{೫ಸ})^{\text{೨}}-\text{೪೦ರಸ}}{(\text{೨ರ}+\text{೫ಸ})(\text{೨ರ}-\text{೫ಸ})}$$

$$=\frac{\text{೪ರ}^{\text{೨}}-\text{೨೦ರಸ}+\text{೨೫ಸ}^{\text{೨}}+\text{೪ರ}^{\text{೨}}+\text{೨೦ರಸ}+\text{೨೫ಸ}^{\text{೨}}-\text{೪೦ರಸ}}{(\text{೨ರ}+\text{೫ಸ})(\text{೨ರ}-\text{೫ಸ})}$$

$$=\frac{\text{೮ರ}^{\text{೨}}-\text{೪೦ರಸ}+\text{೫೦ಸ}^{\text{೨}}}{(\text{೨ರ}+\text{೫ಸ})(\text{೨ರ}-\text{೫ಸ})}$$

---

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಡಬಹುದು.

$$= \frac{೨(೪ರ^೨-೨೦ರಸ+೨೫ಸ^೨)}{(೨ರ+೫ಸ)(೨ರ-೫ಸ)}$$

$$= \frac{೨(೨ರ-೫ಸ)^೨}{(೨ರ+೫ಸ)(೨ರ-೫ಸ)}$$

$$= \frac{೨(೨ರ-೫ಸ)}{೨ರ+೫ಸ}.$$

ಉ. ೬. $\frac{೨ಯ-೧}{೪ಯ+೩} - \frac{ಯ-೫}{೨ಯ-೩}$

$$= \frac{(೨ಯ-೧)(೨ಯ-೩)-(ಯ-೫)(೪ಯ+೩)}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)}$$

$$= \frac{೪ಯ^೨-೮ಯ+೩-(೪ಯ^೨-೧೭ಯ-೧೫)}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)}$$

$$= \frac{೪ಯ^೨-೮ಯ+೩-೪ಯ^೨+೧೭ಯ+೧೫}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)}$$

$$= \frac{೯ಯ+೧೮}{(೪ಯ+೩)(೨ಯ-೩)}.$$

ಉ. ೭. $\frac{೬ಸ-೨}{೬ಸ^೨+೭ಸ-೩} - \frac{೬ಸ-೩}{೮ಸ^೨+೬ಸ-೫}.$

$$= \frac{೨(೩ಸ-೧)}{(೩ಸ-೧)(೨ಸ+೩)} - \frac{೩(೨ಸ-೧)}{(೨ಸ-೧)(೪ಸ+೫)} = \frac{೨}{೨ಸ+೩} - \frac{೩}{೪ಸ+೫}$$

$$= \frac{೨(೪ಸ+೫)-೩(೨ಸ+೩)}{(೨ಸ+೩)(೪ಸ+೫)}$$

$$= \frac{೮ಸ+೧೦-೬ಸ-೯}{(೨ಸ+೩)(೪ಸ+೫)}$$

$$= \frac{೨ಸ+೧}{(೨ಸ+೩)(೪ಸ+೫)}.$$

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ನಾವು ಲ. ಸಮುಚ್ಛೇದವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಛೇದಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದನ್ನು ಮಾಡಿದ ನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ

ಗುಣಕವು ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

ಉ. ೮. $\frac{೧}{೬ರ^2-೧೧ರಲ-೧೦ಲ^2} \quad \frac{೫}{೧೨ರ^2+೫ರಲ-೨ಲ^2}$

$$+\frac{೨}{೮ರ^2-೨೨ರಲ+೫ಲ^2} = \frac{೧}{(೨ರ-೫ಲ)(೩ರ+೨ಲ)} - \frac{೫}{(೩ರ+೨ಲ)(೪ರ-ಲ)}$$

$$+\frac{೨}{(೪ರ-ಲ)(೨ರ-೫ಲ)} = \frac{(೪ರ-ಲ)-೫(೨ರ-೫ಲ)+೨(೩ರ+೨ಲ)}{(೨ರ-೫ಲ)(೩ರ+೨ಲ)(೪ರ-ಲ)}$$

$$=\frac{೪ರ-ಲ-೧೦ರ+೨೫ಲ+೬ರ+೪ಲ}{(೨ರ-೫ಲ)(೩ರ+೨ಲ)(೪ರ-ಲ)}$$

$$=\frac{೨೫ಲ}{(೨ರ-೫ಲ)(೩ರ+೨ಲ)(೪ರ-ಲ)}.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಸುಲಭ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರಬಹುದು.

೧. $\frac{ಪ}{೪}+\frac{ಪ}{೬}$. ೨. $\frac{೩ಪ}{೫}+\frac{೪ಪ}{೯}$. ೩. $\frac{೨ಯ}{೩}+\frac{೩ಯ}{೪}$.

೪. $\frac{ರ}{೬}-\frac{ರ}{೮}$. ೫. $\frac{೩ರ}{೧೪}-\frac{೨ರ}{೨೧}$. ೬. $\frac{೨ಯ}{೫}+\frac{೩ಯ}{೧೦}+\frac{೭ಯ}{೧೫}$.

೭. $\frac{೩ರ}{೪}+\frac{ರ}{೮}+\frac{೫ರ}{೧೨}$. ೮. $\frac{೨ವ}{೯}+\frac{೫ವ}{೧೨}+\frac{೭ವ}{೧೮}$. ೯. $\frac{೫ಯ}{೧೬}+\frac{೩ಯ}{೧೬}+\frac{ಯ}{೪}$.

೧೦. $\frac{೩ಪ}{೫}-\frac{೪ಪ}{೯}+\frac{೨ಪ}{೧೫}$. ೧೧. $\frac{೪}{ಪ}+\frac{೮}{೩ಪ}$. ೧೨. $\frac{೯}{೪ಪ}-\frac{೭}{೬ಪ}$.

೧೩. $\frac{೮}{೩ಪ}+\frac{೫}{೬ಪ}-\frac{೩}{೪ಕ}$. ೧೪. $\frac{೨ಕ}{ಪಬ}+\frac{}{೩ಬಮ}\ \frac{}{೪ಪಮ}$.

೧೫. $\frac{ಯ^2}{ರಲ}-\frac{ರ^2}{ಯಲ}+\frac{ಲ^2}{ಯರ}$. ೧೬. $\frac{೪ಮ}{೩ಪಬ}\quad\frac{೩ಪ}{೨ಬಮ}\quad\frac{೫ಬ}{೬ಪಮ}$.

೧೭. $\frac{೧}{೨ಪ^2}+\frac{೧}{ಪಮ}+\frac{೧}{೨ಮ^2}$. ೧೮. $\frac{೩}{೪ಕ^2}-\frac{೧}{ಕಗ}+\frac{೧}{೩ಗ^2}$.

೧೯. $\frac{೧}{ಕ-ಗ}-\frac{೧}{ಕ+ಗ}$.   ೨೦. $\frac{೪}{ಕ-ಗ}+\frac{೪}{ಕ+ಗ}$.

೨೧. $\frac{೫ಯ-೪ವ}{೩}+\frac{೮ಯ-೩ವ}{೪}$.   ೨೨. $\frac{೪ಪ-೩}{೨}+\frac{೨ಪ-೫}{೩}$.

೨೩. $\frac{೬ಯ+೯}{೫}-\frac{೯ಯ-೨}{೧೫}$.   ೨೪. $\frac{೫ವ-೮}{೨}-\frac{೪ವ-೭}{೮}+\frac{೩ವ+೫}{೧೨}$.

೨೫. $\frac{೧೬ಯ-೩ರ}{೮}-\frac{೧೨ಯ-೯ರ}{೨೦}$.   ೨೬. $\frac{೫ಕ}{ಕ+ಗ}+\frac{೫ಗ}{ಕ-ಗ}$.

೨೭. $\frac{ಯ+ಕ್ಷ}{೩}-\frac{ಯ-ಕ್ಷ}{೬}$.   ೨೮. $\frac{ಯ+ವ}{೫ಮ}+\frac{ಯ-ವ}{೧೦ಮ}$.

೨೯. $\frac{೨(ಕ+ಗ)}{ಗಘ}-\frac{೨(ಕ-ಗ)}{ಕಘ}$.   ೩೦. $\frac{೪}{ಕ್ಷ+೫}+\frac{೩}{ಕ್ಷ-೨}$.

೩೧. $\frac{೯}{ಪ-೩}-\frac{೯}{ಪ+೩}$.   ೩೨. $\frac{೮}{ಯ-೩}\quad\frac{೭}{ಯ-೫}$.   ೩೩. $\frac{೪}{ರ-೨}\quad\frac{೧೬}{ರ^೨-೪}$.

೩೪. $\frac{೬ವ}{ವ^೨+೩ವ}+\frac{೩೬}{ವ^೨-೯}$.   ೩೫. $\frac{ಯ+೪}{ಯ+೩}-\frac{ಯ+೭}{ಯ+೬}$.

೩೬. $\frac{೧}{ಯ+೫}+\frac{೫}{ಯ^೨-೨೫}$.   ೩೭. $\frac{೧}{ಮ-೧೨}\quad\frac{೧೨}{ಮ^೨-೧೪೪}$.

೩೮. $\frac{೪ಯ^೨+೧೨ಯ+೯}{೬ಯ^೨+೧೩ಯ+೬}-\frac{೧೨ಯ^೨-೫ಯ-೨}{೨೦ಯ^೨+೧೩ಯ+೨}$.

೩೯. $\frac{೯ವ^೨+೧೨ವಸ+೧೬ಸ^೨}{೨೭ವ^೩-೬೪ಸ^೩}-\frac{೯ವ+೧೨ಸ}{೧೮ವ^೨-೩೨ಸ^೨}$.

೪೦. $\frac{೧}{೨ಯ^೨-೫ಯ-೨೫}\quad\frac{೧}{೬ಯ^೨+೧೭ಯ+೫}\quad\frac{೧}{೩ಯ^೨-೧೪ಯ-೫}$

೪೧. $\frac{೨೦ನ^೨-೨೯ನ+೫}{೧೨ನ^೨-೩೧ನ+೨೦}-\frac{೪ನ^೨-೧೬ನ+೧೫}{೬ನ^೨-೧೭ನ+೫}$.

೪೨. $\frac{೧}{೨ಪ^೨}\ ;\ \frac{೩}{೪ಪ^೨+೧೦ಪ}\quad\frac{೪}{೪ಪ^೨-೨೫}$

ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದುದು).

$\frac{ಕ}{ನ} = \frac{ಪ}{ಲ}$, ಇದ್ದರೆ ಕಲ = ಪನ.

೧೧·೧. $$\frac{ಕ}{ನ} = \frac{ಪ}{ಲ}$$

$$\therefore \quad \frac{ಕ}{ನ} \times ನಲ = \frac{ಪ}{ಲ} \times ನಲ$$

$$\therefore \quad ಕಲ = ಪನ.$$

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ತಿಳಿದುಬರುವದೇನಂದರೆ **ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದಾಗ, ಒಂದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಛೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಎರಡನೆಯದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯದರ ಛೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ.** ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, **ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದಾಗ ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ (ತಿರುವು ಮುರುವು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದರಿಂದ) ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸರಿಯಿರುತ್ತವೆ.** ಯಾವದೇ ವ್ಯಕ್ತಸಂಖ್ಯಾನ್ವಿತ ಸಮಾನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ತಕ್ಕೊಂಡು ಈ ಸಂಗತಿಯ ನಿಜತ್ವವನ್ನು ನಾವು ಮನಗಾಣಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $\frac{೪}{೯} = \frac{೧೨}{೨೭}$, ೪ × ೨೭ = ೧೦೮ = ೧೨ × ೯.

ಸಮಾನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಛೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು, ಮತ್ತು **ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮಂಡಿಸುವದು,** ಈ ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳು ನಿಜವಾಗಿ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತವೆಂಬ ಮಾತು ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧತೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಡುಬರುವದು. ಈ ಸಂಗತಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ಛೇದವು ೪ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿರುವ ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯು ಪ್ರತಿ-

ಯೊಂದನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು $\frac{೨}{೩}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ಅಂಶವು ಯ ಇದ್ದರೆ ಛೇದವು ಯ + ೪ ಇರುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆಯೇ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{ಯ}{ಯ + ೪}$ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಆಗುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{ಯ + ೫}{ಯ + ೯}$ ಇರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{ಯ + ೫}{ಯ + ೯} = \frac{೨}{೩}$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ $೩(ಯ + ೫) = ೨(ಯ + ೯)$

$$\therefore ೩ಯ + ೧೫ = ೨ಯ + ೧೮$$

$$\therefore ಯ = ೩.$$

$\therefore \frac{೩}{೭}$ ಇದು ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು.

[ತಾಳೆ: $\frac{೩ + ೫}{೭ + ೫} = \frac{೮}{೧೨} = \frac{೨}{೩}$.]

ಉ. ೨. ಅಂಶದ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ಛೇದವು ೧ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇರುವಂಥ ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯ ಅಂಶವನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು ಎರಡುಪಟ್ಟು ಮಾಡಿ ಅದರೊಳಗಿಂದ ೧ ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಬರುವ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{೧}{೩}$ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ಅಂಶವು ಯ ಇದ್ದರೆ ಛೇದವು ೩ಯ − ೧ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{ಯ}{೩ಯ - ೧}$ ಇರುವದು. ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಸಂಗತಿಯ ಮೇಲಿಂದ $\frac{ಯ + ೭}{೨(೩ಯ - ೧) - ೧}$ ಇದು ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುವದು.

$$\therefore \frac{ಯ + ೭}{೨(೩ಯ - ೧) - ೧} = \frac{೧}{೩}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ $೨(೩ಯ - ೧) - ೧ = ೩(ಯ + ೭)$

$$\therefore ೬ಯ - ೨ - ೧ = ೩ಯ + ೨೧$$

$$\therefore ೩ಯ = ೨೪$$

$$\therefore ಯ = ೮.$$

∴ $\frac{೮}{೨೩}$ ಇದು ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು.

[ತಾಳೆ: $\frac{೮+೭}{೨\times ೨೩-೧}=\frac{೧೫}{೪೬-೧}=\frac{೧೫}{೪೫}=\frac{೧}{೩}$.]

ಉ. ೩. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವನ್ನು ೮ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಛೇದವನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೩}{೪}$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅಂಶವನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಛೇದವನ್ನು ೯ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೨}{೧೭}$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{ಅ}{ಛ}$ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ,

$$\frac{ಅ+೮}{ಛ-೫}=\frac{೩}{೪} \text{ ಮತ್ತು } \frac{ಅ-೩}{ಛ+೯}=\frac{೨}{೧೭}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ ೪ಅ+೩೨=೩ಛ−೧೫ ಮತ್ತು ೧೭ಅ−೫೧=೨ಛ+೧೮

ಮತ್ತು ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ೪ಅ − ೩ಛ = −೪೭ .... (೧)

ಮತ್ತು ೧೭ಅ − ೨ಛ = ೬೯ .... (೨)

(೨)ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೩ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೫೧ಅ−೬ಛ=೨೦೭....(೧ಅ)

(೧)ರ ,, ,, ೨ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೮ಅ−೬ಛ=−೯೪....(೨ಅ)

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ೪೩ಅ = ೩೦೧

∴ ಅ = **೭.**

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅ = ೭ ಇಡಲಾಗಿ, ೨೮ − ೩ಛ = −೪೭.

∴ ೩ಛ = ೭೫ ಅಂದರೆ, ಛ = **೨೫.**

∴ $\frac{೭}{೨೫}$ ಇದು ಇಷ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು.

[ತಾಳೆ: $\frac{೭+೮}{೨೫-೫}=\frac{೧೫}{೨೦}=\frac{೩}{೪}$; $\frac{೭-೩}{೨೫+೯}=\frac{೪}{೩೪}=\frac{೨}{೧೭}$.]

ಉ. ೪. ಅಂಶದ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿಯೊಳಗಿಂದ ೫ ಮತ್ತು ಛೇದದ ಇಮ್ಮಡಿಯೊಳಗಿಂದ ೧೨ ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಬೆಲೆಯು $\frac{೨}{೫}$ ಆಗುವ, ಮತ್ತು ಅಂಶದ $\frac{೧}{೩}$ ದಿಂದ ೧ನ್ನು ಕಳೆದು ಛೇದದ ಅರ್ಧದಲ್ಲಿ ೨ನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ ಬೆಲೆಯು $\frac{೨}{೧೫}$ ಆಗುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು $\frac{ಯ}{ರ}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{೩ಯ-೫}{೨ರ-೧೨}=\frac{೨}{೫}$ ಮತ್ತು $\frac{\frac{೧}{೩}ಯ-೧}{\frac{೧}{೨}ರ+೨}=\frac{೨}{೧೫}$.

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ $೧೫ಯ-೨೫=೪ರ-೨೪$ ಮತ್ತು $೫ಯ-೧೫=ರ+೪$
ಮತ್ತು ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ $೧೫ಯ - ೪ರ = ೧ \cdots (೧)$
ಮತ್ತು $೫ಯ - ರ = ೧೯ \cdots (೨)$
(೨) ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $೧೫ಯ - ೩ರ = ೫೭ \cdots (೨ಅ)$
(೨ಅ) ದೊಳಗಿಂದ (೧) ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ $ರ = $ **೫೬.**
(೨) ರಲ್ಲಿ $ರ = ೫೬$ ಇಡಲಾಗಿ $೫ಯ - ೫೬ = ೧೯$
$\therefore ೫ಯ = ೭೫$ ಅಂದರೆ $ಯ = $ **೧೫.**
$\therefore \frac{೧೫}{೫೬}$ ಇದು ಇಷ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು.

[ತಾಳೆ: $\frac{೧೫ \times ೩ - ೫}{೫೬ \times ೨ - ೧೨} = \frac{೪೫ - ೫}{೧೧೨ - ೧೨} = \frac{೪೦}{೧೦೦} = \frac{೨}{೫}$;
$\frac{೧೫ \div ೩ - ೧}{೫೬ \div ೨ + ೨} = \frac{೫ - ೧}{೨೮ + ೨} = \frac{೪}{೩೦} = \frac{೨}{೧೫}$.]

ಉ. ೫. $$\frac{೪(೩ಯ-೪)-೧}{೭} = \frac{೧೧(೨ಯ+೫)-೩೨}{೧೫}$$
$$\therefore \frac{೧೨ಯ-೧೭}{೭} = \frac{೨೨ಯ+೨೩}{೧೫}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ $೧೮೦ಯ - ೨೫೫ = ೧೫೪ಯ + ೧೬೧$
ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ $೨೬ಯ = ೪೧೬$
$\therefore ಯ = $ **೧೬.**

[ತಾಳೆ: ಎಡಬದಿ $= \frac{೪ \times ೪೪ - ೧}{೭} = \frac{೧೭೫}{೭} = $ **೨೫.**
ಬಲಬದಿ $= \frac{೧೧ \times ೩೭ - ೩೨}{೧೫} = \frac{೪೦೭ - ೩೨}{೧೫} = \frac{೩೭೫}{೧೫} = $ **೨೫.**]

ಉ. ೬. $$\frac{೫(೪ಯ+೩)-೪}{೧೨(೫ಯ-೨)-೫} = \frac{೪(ಯ+೧)+೩(ಯ+೩)}{೭(೩ಯ+೧)-೮}$$
$$\therefore \frac{೨೦ಯ+೧೫-೪}{೬೦ಯ-೨೪-೫} = \frac{೪ಯ+೪+೩ಯ+೯}{೨೧ಯ+೭-೮}$$
$$\therefore \frac{೨೦ಯ+೧೧}{೬೦ಯ-೨೯} = \frac{೭ಯ+೧೩}{೨೧ಯ-೧}$$

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದಿಂದ $(೭ಯ+೧೩)(೬೦ಯ-೨೯)=(೨೦ಯ+೧೧)(೨೧ಯ-೧$

$$\therefore ೪೨೦ಯ^{೨} + ೭೮೦ಯ - ೨೦೩ಯ - ೩೭೭ = ೪೨೦ಯ^{೨} + ೬೩೧ಯ - ೨೦ಯ - ೧೧$$

$$\therefore ೪೨೦ಯ^{೨} + ೫೭೭ಯ - ೩೭೭ = ೪೨೦ಯ^{೨} + ೬೧೧ಯ - ೧೧$$

$$\therefore ೩೬೬ಯ = ೩೬೬$$

$$\therefore ಯ = ೧.$$

[ತಾಳೆ: ಎಡಬದಿ $= \frac{೩೧}{೩೧} = ೧$. ಬಲಬದಿ $= \frac{೮+೧೨}{೨೮-೮} = \frac{೨೦}{೨೦} = ೧$.]

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೧.

೧. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಛೇದವು ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವೆರಡನ್ನು ೬ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು $\frac{೬}{೭}$ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೨. $\frac{೨}{೫}$ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಿರುವ ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವನ್ನು ೭ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಛೇದವನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೩}{೪}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೩. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವನ್ನು ೧ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಛೇದವನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೧}{೨}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೪. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವನ್ನು ೧ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೨}{೫}$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೩}{೧೦}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೫. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವೆರಡನ್ನೂ ೩ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೪}{೭}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಎರಡೂ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದು $\frac{೨}{೩}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೬. ಇಂದು ಬಾಬಣ್ಣನ ವಯಸ್ಸು ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸಿನ $\frac{೩}{೧೩}$ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು $\frac{೨}{೭}$ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೭. ಈಗ ಲಕ್ಷ್ಮೀಬಾಯಿಯವರ ವಯಸ್ಸು ವೆಂಕಟರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೯/೧೦ ಇರುತ್ತದೆ. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ೮/೯ ಇತ್ತು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೮. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ನಲಿನಿಯ ವಯಸ್ಸು ಶಾರದಾಬಾಯಿಯವರ ವಯಸ್ಸಿನ ೪/೧೧ ಇತ್ತು. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ೫/೧೩ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೯. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಕಮಲೆಯ ವಯಸ್ಸು ನಾರಾಯಣರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೧/೨ ಇತ್ತು. ೨ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅದು ಶಾರದಾಬಾಯಿಯವರ ವಯಸ್ಸಿನ ೧/೩ ಆಗುವದು. ಶಾರದಾಬಾಯಿಯವರು ನಾರಾಯಣರಾಯರಿಗಿಂತ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಸಣ್ಣವರಿದ್ದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೧೦. ಲಗ್ನದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕನ ವಯಸ್ಸು ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ೪/೫ ಇತ್ತು. ಈಗ ಅದು ೧೦/೧೧ ಇರುತ್ತದೆ. ಲಗ್ನವಾಗಿ ಈಗ ೩೦ ವರ್ಷಗಳಾದವು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೧೧. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಾಲು ಇದ್ದು, ಅದರಲ್ಲಿ ನೀರು ೨/೭ ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಮತ್ತೂ ನಾಲ್ಕು ಸೇರು ನೀರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ನೀರು ೧/೩ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಮೂಲ ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ನೀರು ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಹಾಲು ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ಮೊದಲು ಚಹದ ದರವು ಕಾಫಿಯ ದರದ ೨/೩ ಇತ್ತು. ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨೪, ಮತ್ತು ೧೪. ಏರಿದ್ದರಿಂದ ಈಗ ಅದು ೩/೪ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ರತ್ತಲಿನ ದರವೇನಿತ್ತು?

೧೩. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೩/೪ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ೨೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೨೫ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಮೊದಲನೆಯದು ಎರಡನೆಯದರ ೧೦/೧೧ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೧೪. ರಾಮರಾಯರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಗೋವಿಂದರಾಯರ ಹತ್ತರ ಇದ್ದ ರಕಮಿನ ೪/೫ ರಕಮಿತ್ತು. ಇಬ್ಬರೂ ತಮ್ಮ ಹತ್ತರವಿದ್ದ ಹಣವನ್ನು

ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು. ರಾಮರಾಯರಿಗೆ ೧೩ ಸಾವಿರ ರೂ. ಲಾಭ-ವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಗೋವಿಂದರಾಯರಿಗೆ ೨ ಸಾವಿರ ರೂ. ಹಾನಿಯಾಯಿತು. ಈಗ ಗೋವಿಂದರಾಯರ ಹತ್ತರ ರಾಮರಾಯರ ಹತ್ತರವಿದ್ದ ರಕಮಿನ ೧೩/೫ ರಕಮು ಇದ್ದರೆ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಹತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತೆಂಬು-ದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೫. ಒಂದು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಿಳೀ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಕೆಂಪು ಕಮಲ-ಗಳಿದ್ದವು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ೧೦ ಬಿಳೀ ಮತ್ತು ೧೫ ಕೆಂಪು ಹೀಗೆ ೨೫ ಕಮಲಗಳನ್ನು ಕೊಯ್ದರು. ಉಳಿದ ಕಮಲಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲಾಗಿ ಬಿಳೀ ಕಮಲಗಳು ಕೆಂಪು ಕಮಲಗಳ ೫/೪ರಷ್ಟು ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿತು. ೧೦ ಕೆಂಪು ಮತ್ತು ೧೫ ಬಿಳೀ ಕಮಲಗಳನ್ನು ಕೊಯ್ದಿದ್ದರೆ ಉಳಿದ ಕಮಲಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಳೀ ಕಮಲಗಳು ಕೆಂಪು ಕಮಲಗಳ ೧/೨ದಷ್ಟು ಇರುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರದ ಕಮಲಗಳೆಷ್ಟಿದ್ದವು?

೧೧·೨. ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ತನ್ನ ಊರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಸೈಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ಹೋದನು. ಅವನು ತಾನು ನಡೆಸಿದ ವೇಗಕ್ಕಿಂತ ತಾಸಿಗೆ ೨ ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು ವೇಗದಿಂದ ಸೈಕಲ್ಲನ್ನು ನಡೆಸಿದ್ದರೆ ಅರ್ಧ ತಾಸು ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು, ಆದರೆ ೧ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ವೇಗದಿಂದ ನಡೆಸಿದ್ದರೆ ೨೦ ಮಿನಿಟು ತಡವಾಗಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಆ ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅವನು ಹೋದ ವೇಗ ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಹತ್ತಿದ ಕಾಲ ಇವುಗಳನ್ನು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗುವದು. ತಾಸಿಗೆ **ವ** ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಅವನು ಹೋದರೆ ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ **ಕ** ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾದವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು **ಕವ** ಮೈಲುಗಳು ಇರುವದು. ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಮೇರೆಗೆ, ಅವನು ತಾಸಿಗೆ (**ವ** + ೨) ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ (**ಕ** − ೧/೨) ತಾಸು-

ಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಅಂದರೆ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಅಂತರವು (ಕ - ೩) (ವ + ೨) ಮೈಲುಗಳು ಇರುತ್ತದೆಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅವನು ತಾಸಿಗೆ (ವ – ೧) ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋದರೆ ಪ್ರವಾಸವು (ಕ + ೩) ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಯುತ್ತಿತ್ತು ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅಂತರವು (ಕ + ೩)(ವ - ೧) ಮೈಲುಗಳು ಇದ್ದದ್ದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಎರಡೂ ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು **ಸ್ಥಾಯಿ** (ಎಂದೂ ಬದಲಾಗದಿರುವಂಥ) ಸಂಗತಿಯು ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. (ಕ - ೩)(ವ + ೨) = **ಕವ** ಮತ್ತು (ಕ + ೩)(ವ – ೧) = **ಕವ** ಈಗ ನಾವು ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವಾ.

(ಕ - ೩)(ವ + ೨) = **ಕವ**

∴ **ಕವ** + ೨**ಕ** - ೩**ವ** - ೬ = **ಕವ**

∴ ೨**ಕ** – ೩**ವ** = ೬

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೨ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ೪**ಕ** - **ವ** = ೨ ....(೧)

ಮತ್ತು (ಕ + ೩)(ವ - ೧) = **ಕವ**

∴ **ಕವ** - **ಕ** + ೩**ವ** – ೩ = **ಕವ**

∴ - **ಕ** + ೩**ವ** = ೩

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೩ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ - ೩**ಕ** + **ವ** = ೧ ....(೨)

೪**ಕ** - **ವ** = ೨ ....(೧)

ಬೇರೀಜಿನಿಂದ **ಕ** = ೩.

(೨) ರಲ್ಲಿ **ಕ** = ೩ನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ, – ೯ + **ವ** = ೧, ಅಂದರೆ **ವ** = **೧೦.**

∴ ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ **ಅಂತರವು** = **ಕವ** ಮೈಲು = **೩೦ ಮೈಲು.**

[ತಾಳೆ: ೧೨ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ೩೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೨½ ತಾಸುಗಳ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ, ಅಂದರೆ ಅರ್ಧ ತಾಸು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತುತ್ತದೆ. ೯ ಮೈಲು-ಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಅದೇ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೩⅓ ತಾಸುಗಳು ಹತ್ತುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ೨೦ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.]

ಉ. ೨. ಒಬ್ಬ ಒಕ್ಕಲಿಗನು ತನ್ನ ಊರಿನಿಂದ ಸಂತೆಯ ಊರಿಗೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಹೋದನು. ಅವನು ತನ್ನ ನಡಿಗೆಯ ವೇಗವನ್ನು

ತಾಸಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅವನಿಗೆ ಅಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟಲು ಅರ್ಧ ತಾಸು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ತಾಸಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ನಡೆದಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಆ ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

ಅವನು ತಾಸಿಗೆ **ಗ** ಮೈಲುಗಳ ಗತಿಯಿಂದ ನಡೆದನು ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ **ಕ** ತಾಸುಗಳು ಹತ್ತಿದವು, ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ, **ಕಗ** ಮೈಲು ಇದು ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೇಲಿಂದ,

$(ಕ - \frac{೧}{೨})(ಗ + \frac{೧}{೨}) = ಕಗ$ ಮತ್ತು $(ಕ + \frac{೨}{೩})(ಗ - \frac{೧}{೨}) = ಕಗ$.

ಈಗ $(ಕ - \frac{೧}{೨})(ಗ + \frac{೧}{೨}) = ಕಗ$

$\therefore ಕಗ + \frac{೧}{೨}ಕ - \frac{೧}{೨}ಗ - \frac{೧}{೪} = ಕಗ$

$\therefore \frac{೧}{೨}ಕ - \frac{೧}{೨}ಗ = \frac{೧}{೪}$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $ಕ - ಗ = \frac{೧}{೨}$ ....(೧)

ಮತ್ತು $(ಕ + \frac{೨}{೩})(ಗ - \frac{೧}{೨}) = ಕಗ$

$\therefore ಕಗ - \frac{೧}{೨}ಕ + \frac{೨}{೩}ಗ - \frac{೧}{೩} = ಕಗ$

$\therefore -\frac{೧}{೨}ಕ + \frac{೨}{೩}ಗ = \frac{೧}{೩}$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $-ಕ + \frac{೪}{೩}ಗ = \frac{೨}{೩}$ ....(೨)

$ಕ - ಗ = \frac{೧}{೨}$ ....(೧)

ಬೇರೀಜಿನಿಂದ $\frac{೧}{೩}ಗ = ೧\frac{೧}{೬}$

$\therefore ಗ = ೩\frac{೧}{೨}$.

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ $ಗ = ೩\frac{೧}{೨}$ ಹಾಕಲಾಗಿ, $ಕ - ೩\frac{೧}{೨} = \frac{೧}{೨}$, ಅಂದರೆ $ಕ = ೪$.

$\therefore$ **ಅಂತರವು = ಕಗ** ಮೈಲುಗಳು = ೧೪ ಮೈಲುಗಳು.

[ತಾಳೆ: ೪ ಮೈಲುಗಳ ಗತಿಯಿಂದ ೧೪ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೩॥ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ, ಅಂದರೆ ಅರ್ಧ ತಾಸು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ೩ ಮೈಲುಗಳ ಗತಿಯಿಂದ ಅದೇ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೪$\frac{೨}{೩}$ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.]

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ:

$$\frac{೩ಯ-೪ರ+೫}{೩}-\frac{೮ರ-೫ಯ-೭}{೫}-೨\frac{೧}{೨}=\frac{೭}{೧೦};$$

$$\frac{೪ಯ+೩ರ-೨}{೪}+\frac{೯ಯ-೭ರ+೩}{೬}-೨\frac{೧}{೮}=೪\frac{೧೩}{೨೪}.$$

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಾವು ಮೊದಲು ಸರಳ-ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವಾ.

$$\frac{೩ಯ-೪ರ+೫}{೩}-\frac{೮ರ-೫ಯ-೭}{೫}-೨\frac{೧}{೨}=\frac{೭}{೧೦}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೩೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$೧೦(೩ಯ-೪ರ+೫)-೬(೮ರ-೫ಯ-೭)-೭೫=೨೧$$

$$\therefore ೩೦ಯ-೪೦ರ+೫೦-೪೮ರ+೩೦ಯ+೪೨-೭೫=೨೧$$

$$\therefore ೬೦ಯ-೮೮ರ+೧೭=೨೧$$

$$\therefore ೬೦ಯ-೮೮ರ=೪ \quad ...(೧)$$

ಮತ್ತು $$\frac{೪ಯ+೩ರ-೨}{೪}+\frac{೯ಯ-೭ರ+೩}{೬}-೨\frac{೧}{೮}=೪\frac{೧೩}{೨೪}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೨೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$೬(೪ಯ+೩ರ-೨)+೪(೯ಯ-೭ರ+೩)-೫೧=೧೦೯$$

$$\therefore ೨೪ಯ+೧೮ರ-೧೨+೩೬ಯ-೨೮ರ+೧೨-೫೧=೧೦೯$$

$$\therefore ೬೦ಯ-೧೦ರ-೫೧=೧೦೯$$

$$\therefore ೬೦ಯ-೧೦ರ=೧೬೦ \quad .... \quad ...(೨)$$

$$೬೦ಯ-೮೮ರ=೪ \quad .... \quad ...(೧)$$

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ $೭೮ರ=೧೫೬$

$$\therefore ರ=೨.$$

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ **ರ** = ೨ ನ್ನು ಹಾಕಲಾಗಿ, $೬೦ಯ-೨೦=೧೬೦$

ಅಂದರೆ, $೬೦ಯ=೧೮೦$, ಅಂದರೆ $ಯ=೩$.

ಯ = ೩; ರ = ೨.

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ: $\frac{೨}{೫}(೮ಯ-೭ವ)=೧೨;\ ೭ವ-\frac{೫}{೧೧}(೧೩-೨ಯ)=೧.$

$$\frac{೨}{೫}(೮ಯ-೭ವ)=೧೨$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೨(೮ಯ − ೭ವ) = ೬೦

,, ,, ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ೮ಯ − ೭ವ = ೩೦ .... (೧)

೭ವ − $\frac{೫}{೧೧}$(೧೩ − ೨೩ಯ) = ೧

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೧ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೭೭ವ − ೫(೧೩ − ೨೩ಯ) = ೧೧

∴ ೭೭ವ − ೬೫ + ೧೧೫ಯ = ೧೧

∴ ೧೧೫ಯ + ೭೭ವ = ೭೬ ....(೨)

(೧)ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೧ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೮೮ಯ−೭೭ವ=೩೩೦

೧೧೫ಯ + ೭೭ವ = ೭೬....(೨)

೮೮ಯ − ೭೭ವ = ೩೩೦

ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ೨೦೩ಯ = ೪೦೬

∴ **ಯ** = **೨.**

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಯ = **೨** ಹಾಕಲಾಗಿ,

೧೬ − ೭ವ = ೩೦, ಅಂದರೆ ೭ವ = ೧೪, ಅಂದರೆ **ವ** = − **೨.**

ಯ = **೨**; **ವ** = − **೨.**

ಉ. ೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ: ·೦೮ರ−·೧೧ಸ+೧·೭೬=೦ ; ·೦೨ರ−·೦೧ಸ=·೧೨.

·೦೮ರ − ·೧೧ಸ + ೧·೭೬ = ೦

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೮ರ − ೧೧ಸ = − ೧೭೬....(೧)

·೦೨ರ − ·೦೧ಸ= ·೧೨

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ೧೦೦ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೨ರ − ಸ = ೧೨ ....(೨)

,, ,, ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ೮ರ − ೪ಸ = ೪೮

೮ರ − ೧೧ಸ = − ೧೭೬....(೧)

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ೭ಸ = ೨೨೪

∴ ಸ = ೩೨.

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಸ = ೩೨ ಹಾಕಲಾಗಿ,

೨ರ − ೩೨ = ೧೨, ಅಂದರೆ ೨ರ = ೪೪, ರ = **೨೨.**

ರ = **೨೨**; **ಸ** = **೩೨.**

ಅಥವಾ ·೦೮ರ − ·೧೧ಸ + ೧·೭೬ = ೦

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ·೦೮ರ − ·೧೧ಸ = − ೧·೭೬

೨ ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

·೦೮ರ − ·೧೧ಸ = − ೧·೭೬

·೦೮ರ − ·೦೪ಸ = ·೪೮

ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ − ·೦೭ಸ = − ೨·೨೪ ∴ **ಸ = ೩೨.**

೨ ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಸ = ೩೨ ನ್ನು ಹಾಕಲಾಗಿ

·೦೨ರ − ·೩೨ = ·೧೨

∴ ·೦೨ರ = ·೪೪ ∴ **ರ = ೨೨.**

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೨.

೧. ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವೆ ಪ್ರವಾಸಿಕರನ್ನು ಒಯ್ಯುವ ಒಂದು ಬಸ್ಸು ದಿನಾಲು ಒಂದು ಊರಿನಿಂದ ಗೊತ್ತುಮಾಡಿದ ವೇಳೆಗೆ ಹೊರಟು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ವೇಳೆಗೆ ಎರಡನೇ ಊರಿಗೆ ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ. ಒಂದು ದಿವಸ ಹೊರಡಲು ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳು ತಡವಾದರೂ ತಾಸಿಗೆ ೫ ಮೈಲಿನಂತೆ ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ವೇಳೆಗೆ ಅದು ಎರಡನೇ ಊರಿಗೆ ಮುಟ್ಟಿತು. ಮತ್ತು ಒಮ್ಮೆ ಕೆಲವು ಕಾರಣಗಳಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೫ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಬೇಕಾಯಿತು. ಅದರಿಂದ ಮುಟ್ಟಲು ನಿತ್ಯದ-ಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ತಾಸು ತಡವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೨. ಸಾದಾ ಗಾಡಿಗಿಂತ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಮೇಲ ಗಾಡಿಗೆ ಎರಡು ಸ್ಟೇಶನಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಹೋಗಲು ೧ ತಾಸು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಮಹಾಲ ಗಾಡಿಗೆ ೨ ತಾಸು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ, ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಸ್ಟೇಶನುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೩. ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿ ಸಕ್ಕರೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ಹಣವು ಖರ್ಚುಮಾಡಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇತ್ತೀಚಿಗೆ ದರವು ಸೇರಿಗೆ ೧॥ ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ದರವು ಸೇರಿಗೆ ೧॥ ಆಣೆ ಇಳಿದಿದ್ದರೆ

೧| ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲ್ಪಡುತ್ತಿತ್ತು, ಮತ್ತು ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ೨ ಇಂ. ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಅಗಲವನ್ನು ೧ ಇಂ. ನಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅಥವಾ ಉದ್ದಳತೆ-ಯನ್ನು ೩ ಇಂ. ಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಅಗಲಳತೆಯನ್ನು ೨ ಇಂ. ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೂ ಸಹ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅಷ್ಟೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೫. ಕೆಲವು ಜನರು ಕೆಲವು ದಿವಸ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿ ತಮ್ಮ ಊರೊಳಗಿನ ರಸ್ತೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿದರು. ಮೊದಲಿಗಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಮಂದಿ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ ಎರಡು ದಿವಸಗಳು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಐದು ಮಂದಿ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ನಾಲ್ಕು ದಿವಸಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಕೆಲಸದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ಜನರು ಇದ್ದರು, ಮತ್ತು ಅವರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಿವಸಗಳು ಹತ್ತಿದ್ದವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪುಟದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಾಲು-ಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ೯ ಪುಟಗಳು ಕಡಿಮೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಾಲು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ೫ ಪುಟಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಮುದ್ರಿಸಿದ ಪುಟಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪುಟದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೭. ರಾಮ, ಗೋವಿಂದ ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣ ಇವರು ತಮ್ಮ ಊರಿಂದ ಎರಡನೇ ಊರಿಗೆ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲಿಂದ ಹೋಗಲು ಒಂದೇ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಹೊರಟರು. ಗೋವಿಂದನಿಗಿಂತ ರಾಮನು ತಾಸಿಗೆ ಒಂದು ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು, ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣನು ಒಂದು ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ ಹೋಗಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನಿಗಿಂತ ರಾಮನಿಗೆ ೭|| ಮಿನಿಟುಗಳು ಕಡಿಮೆ, ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣನಿಗೆ ೯ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಹತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ..

೮. ಒಂದು ಸಮಾರಂಭಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಣ್ಣ ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ ಹಂಚಲು ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಾಕಾಗುವ ಕೆಲವಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು

ತನ್ನ ಹತ್ತಿರ ತಕ್ಕೊಂಡನು. ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ೧೦೦ ಹುಡುಗರು ಹೆಚ್ಚು ಬಂದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಹುಡುಗನ ಪಾಲಿಗೆ ಒಂದು ಆಣೆ ಕಡಿಮೆ ಬಂದಿತು. ೬೦ ಹುಡುಗರು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಒಂದು ಆಣೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಹುಡುಗರೆಷ್ಟು ಇದ್ದರು, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಿಕ್ಕಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೯. ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಮೂರು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಾಕೃತಿಯ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವುಳ್ಳ ಹೊಲಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ನಡುವಿನದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೪ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ೨ ವಾರು ಕಡಿಮೆ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ನಡುವಿನದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೬ ವಾರು ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ೪ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ನಡುವಿನ ಹೊಲದ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೦. ತನಗೆ ವಿವಕ್ಷಿತವಾದ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನವು ಸಿಗಬೇಕೆಂಬ ಇಚ್ಛೆಯಿಂದ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಕೆಲವು ರಕಮನ್ನು ಒಬ್ಬ ಸಾಹುಕಾರನ ಹತ್ತಿರ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟನು. ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು $\frac{೧}{೨}$% ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ೧೦ ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು $\frac{೧}{೨}$% ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ೭॥ ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಇಡಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ರಕಮನ್ನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಇಟ್ಟಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೧೧. $೫ಯ + \frac{೩}{೮}(೭ರ - ೨೮) = ೩೮; \quad \frac{೪}{೭}(೪ಯ + ೫ರ) + ೩ರ = ೫೬.$

೧೨. $\frac{೩}{೨}ರ - ೫(\frac{೭}{೮}ವ - ೨ರ) + ೧೨ = ೦; \quad \frac{೪}{೫}(ವ + ೬ರ) + \frac{೩}{೮}(೪ರ - ೫ವ) = ೪.$

೧೩. $\frac{೨}{೯}(ಯ + ೪ಸ - ೨) - ೨\frac{೧}{೨}(೮ಯ - ೫ಸ + ೨) + ೩೮ = ೦; \quad ೨ಯ - ೩ಸ = ೦.$

೧೪. $(ಯ - ೪)(ಕ್ಷ + ೮) = (ಯ - ೫)(ಕ್ಷ + ೫); \quad \frac{೫}{೭}ಕ್ಷ - \frac{೬}{೮}ಯ + \frac{೧೧}{೧೨} = ೦.$

೧೫. $(೫ಯ - \frac{೨}{೩})(೪ವ + \frac{೧}{೨}) = (೨ಯ + \frac{೧}{೩})(೧೦ವ - ೨\frac{೧}{೨}); \quad \frac{೨}{ಯ} = \frac{೩}{ವ}.$

೧೬. $·೭ರ - ·೯ಸ = ·೩; \quad \frac{೫}{೭}ರ - \frac{೩}{೮}ಸ = ೧\frac{೩}{೪}.$

೧೭. $·೦೫ಲ + ·೨೧ವ = ೧·೨; \quad ·೩೭ಲ - ·೨೩ವ + ·೦೪ = ೦.$

೧೮. $·೦೫(೩·೬೬ಯ - ೧·೨೫ವ) - ೧·೭೬೭೫ = ೦;$

$·೩(·೨೩ಯ + ವ) - ·೨(·೦೭ಯ - ವ) = ·೭೧.$

(ಪರೀಕ್ಷಾತ್ಮಕ) ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಗಳು

ಮೊದಲನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಎರಡು ಗಾಡಿಗಳ ತಾಸಿನ ವೇಗಗಳಲ್ಲಿ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವು ಇರುತ್ತದೆ. ೨೪೦ ಮೈಲು ಹೋಗಲಿಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗಾಡಿಗೆ ಎರಡನೇ ಗಾಡಿಗಿಂತ ೨ ತಾಸು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $(೫ಯ+೨)(೩ಯ-೪)-(೭ಯ+೩)(ಯ-೨) = ೨(೨ಯ-೧)^{೨}+೧೧.$

(ಆ) $೮ರ - ೫ಲ = ೧೧\,;\; ೧೩ರ + ೪ಲ = ೩೦.$

೩. ಅರ್ಧವರ್ತುಳದ ಪರಿಮಿತಿಯು (**ಪ**) ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು (**ತ**) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು **ಪ** ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಿರಿ. ೫೬ ಇಂ. ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅರ್ಧವರ್ತುಳದ ಪರಿಮಿತಿಯು ಎಷ್ಟಿರುವದು?

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೧೪ಯ^{೨} - ೫೭ಯ - ೨೭.$

(ಆ) $೧೬ಯ^{೨} - ೮ಯರ - ೩೪ರ^{೨} + ೧೦ರಲ - ಲ^{೨}.$

(ಇ) $೧೨೫ರ^{೩} - ೩೪೩ಸ^{೩}.$

೫. $೪ಪ^{೨} - ೨೮ಪ + ೪೯$, $೪ಪ^{೨} - ೪೯$ ಮತ್ತು $೬ಪ^{೨} - ೭ಪ - ೪೯$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೮}{೨ಯ - ೭} - \frac{೮}{೨ಯ - ೫}.$

೭. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಒಂದೇ ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಖುರ್ಚಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೩ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ, ೪ ಖುರ್ಚಿಗಳು ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ೪ ಖುರ್ಚಿಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಖುರ್ಚಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನು, ಮತ್ತು ದರವು ಯಾವುದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಎರಡನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವಳು ೧೪ ಆ. ಗೆ ಡಝನ ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಳು. ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ೧೫ ಕೊಳೆತದ್ದರಿಂದ

ಅವುಗಳನ್ನು ಒಗೆದು, ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಅವಳು ೪ ಆ. ಗೆ ೩ರಂತೆ ಮಾರಿದಳು. ಈ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವಳಿಗೆ ಒಂದು ರೂ. ಲಾಭವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವಳು ಎಷ್ಟು ಮೋಸಂಬಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದಳು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $·೪೨ಯ + ·೩(·೨ಯ - ·೫) + ·೧೬ = ·೫(·೩ಯ - ·೭) + ೧·೩೫.$

(ಆ) $೫ರ + \frac{೩}{೭} ಲ = ೧೯; \ \frac{೪}{೫} ರ - ೨ಲ = ೩೨.$

೩. ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು **ನ** ಎಂದು ತಿಳಿದು ಐದು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು (**ಬ**) ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ೪೮೭೮, ೪೮೭೯, ೪೮೮೦, ೪೮೮೧ ಮತ್ತು ೪೮೮೨ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ಐದು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೦೦೦ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೮ಯ^{೨} + ೨೨ಯ - ೨೧.$

(ಆ) $೧೬ಯ^{೨} - ೪೦ಯರ + ೨೫ರ^{೨} + ೧೨ಯ - ೧೫ರ.$

(ಇ) $೮ರ^{೩} - ೧೨ರ^{೨}ಸ + ೧೮ರಸ^{೨} - ೨೭ಸ^{೩}.$

೫. $ಕ^{೨} - ೨೫ಗ^{೨}$, $ಕ^{೩} - ೧೨೫ಗ^{೩}$, ಮತ್ತು $ಕ^{೪} - ೬೨೫ಗ^{೪}$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೪}{ಪ^{೨} - ಬ^{೨}} - \frac{೮ಪಬ}{ಪ^{೪} - ಬ^{೪}}.$

೭. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಲಾಗಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೪}{೫}$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೩ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಲಾಗಿ $\frac{೧}{೨}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

ನೂರನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೪ ಇದ್ದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕಿಂತ ೫೬ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{ಯ + ೫}{೮} - \frac{೪ಯ - ೭}{೫} = ೧ - ೪ಯ + \frac{೯ಯ - ೫}{೨}.$

(ಆ) $\frac{೨}{೩}$(೪ರ + ೩ಲ) = ೫ರ − ೨ಲ − ೨$\frac{೧}{೩}$; ೩ರ − ೭ಲ + ೧ = ೦.

೩. ಕೋಣೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಉ), ಅಗಲಳತೆಯು (ಅ), ಎತ್ತರವು (ಎ), ಮತ್ತು ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಗೋಡೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು (ಕ್ಷ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಉದ್ದಳತೆಯು ೧೫ ಫೂ., ಅಗಲಳತೆಯು ೧೪ ಫೂ., ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ೧೨ ಫೂ. ಇದ್ದರೆ ಗೋಡೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) ೪೮ಯ^{೨}+೫೪ಯರ−೨೭ರ^{೨}.

(ಆ) ೮ಪ^{೩}−೧೨ಪ^{೨}ಬ−೧೮ಪಬ^{೨}+೨೭ಬ^{೩}.

(ಇ) ೨೫ಕ^{೪}−೭೪ಕ^{೨}+೪೯.

೫. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೭ ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ೭ರಿಂದ ಏನೂ ಶೇಷವಿಲ್ಲದೇ ಭಾಗವು ಹೋಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{ಸ^{೨}-೨ಸ-೮}{ಸ^{೨}-೧೨ಸ+೩೨}-\frac{ಸ^{೨}-೬ಸ+೯}{ಸ^{೨}-೧೧ಸ+೨೪}$.

೭. ದರವು ಮೊದಲಿನದೇ ಇರಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದು ಬೇಕಾಗಿರುವಷ್ಟೇ ಹಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಾನು ನೋಟಬುಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಹೋದಾಗ, ಅದು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೨ ಆ. ಹೆಚ್ಚಾದ್ದರಿಂದ ೩ ನೋಟಬುಕ್ಕುಗಳು ಕಡಿಮೆ ಸಿಕ್ಕವು. ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೨ ಆ. ಇಳಿದಿದ್ದರೆ, ೬ ನೋಟಬುಕ್ಕುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ನನಗೆ ಎಷ್ಟು ನೋಟಬುಕ್ಕುಗಳು ಬೇಕಾಗಿದ್ದವು ಮತ್ತು ನನ್ನ ಹತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಛೇದವು ಅಂಶಕ್ಕಿಂತ ೪ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಎರಡರೊಳಗಿಂದಲೂ ೧ ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{೧}{೨}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೬ಯ-೫}{೫}+\frac{೨೧ಯ-೩}{೧೦}+\frac{೩ಯ}{೨೦}=\frac{೯ಯ+೨}{೪}-೧.$

(ಆ) $(೫ಯ-೪)(೨ರ+೩)=(ಯ-೨)(೧೦ರ+೧);\ ೮ಯ+೯ರ=೫.$

೩. ಹಿಂದಿನ ಪತ್ರಿಕೆಯೊಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಉದ್ದಳತೆಯು ೧೨ ಫೂ., ಎತ್ತರ ೧೦ ಫೂ., ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕೂ ಗೋಡೆಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೪೪೦ ಚೌ. ಫೂ. ಇದ್ದರೆ, ಕೋಣೆಯ ಅಗಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೭ಯ^{೨}-೨೨ಯರ+೧೬ರ^{೨}+೩೫ಯ-೪೦ರ.$

(ಆ) $೭೨೯ರ^{೩}-\frac{೧}{೭೨೯}ಲ^{೩}.$

(ಇ) $೮೧ದ^{೪}-೨೫೬ನ^{೪}.$

೫. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೨೫ ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ೨೫ ರಿಂದ ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವು ಹೋಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೪}{ಯ}-\frac{೨}{ಯ-೧} : \frac{೨}{ಯ^{೨}-ಯ}$

೭. ೨ ರೂ. ೧೦ ಆ.ಗೆ ರತ್ತಲು ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ೭ ಆ.ಗೆ ರತ್ತಲು ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ ನನ್ನ ೧೬ ರೂ. ೧೦ ಆ. ಖರ್ಚಾದವು. ಚಹದ ದರವು ರತ್ತಲಿಗೆ ೨ ಆ. ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ದರವು ೧ ಆ. ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ೨ ಆ. ಕಡಿಮೆ ಖರ್ಚಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ನಾನು ಎಷ್ಟು ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಂಡೆನು?

ಐದನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ೨೦೦ ಇದ್ದು, ಒಂದರ $\frac{೧}{೬}$ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ $\frac{೧}{೯}$ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೬ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೯ಸ-೧೪}{೪}-\frac{೫ಸ+೨೨}{೧೨}=\frac{೭ಸ-೧೬}{೬}.$

(ಆ) $\frac{\text{೪ಲ}}{\text{೫}} - \frac{\text{೩ವ}}{\text{೪}} + \text{೨} = 0; \ \frac{\text{೫ಲ}}{\text{೬}} + \frac{\text{೪ವ}}{\text{೯}} = \text{೭}\frac{\text{೧೩}}{\text{೧೮}}.$

೩. ಅ ಫೂ. ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉ ಫೂ. ಉದ್ದವಿರುವ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಲು ಗೋಡೆಗುಂಟ ೨ ಫೂ. ಅಗಲ ಜಾಗೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಗುಡಾರನ್ನು ಹಾಸಿದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? ಚೌರಸ ಫೂಟಿಗೆ ಕ ರೂ. ಯಂತೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು? ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ೧೬ ಫೂ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು ೧೪ ಫೂ. ಅಗಲವಿರುವ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಸಿದ ಗುಡಾರದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $\text{೨ಪ}^2 - \text{೧೦೨ಪ} + \text{೧೦೮೦}.$

(ಆ) $\text{೪ಕ}^2 - \text{೨೦ಕಗ} + \text{೨೫ಗ}^2 - \text{೩೬ಫ}^2.$

(ಇ) $\text{೫ಬ}^2\text{ಮ} - \text{೭ಮ} + \text{೫ಬ} - \text{೭ಬಮ}^2.$

೫. $\text{೧೬ಬ}^2 - \text{೧೦೦ಮ}^2$, $\text{೭೨ಬ}^2 - \text{೩೬೦ಬಮ} + \text{೪೫೦ಮ}^2$, ಮತ್ತು $\text{೪೮ಬ}^2 + \text{೨೪೦ಬಮ} + \text{೩೦೦ಮ}^2$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. $\frac{\text{೪}}{\text{೫}}(\text{೩ದ} - \text{೨ನ}) + \frac{\text{೩}}{\text{೪}}(\text{೪ನ} - \text{೫ದ}) - \frac{\text{೬}}{\text{೧೦}}(\text{೨ದ} - \text{೯ನ})$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೭. ಒಂದು ಆಯತದ ಎದಿರುಬದುರಿನ ಎರಡು ಭುಜಗಳು (೮ಕ − ೫ಗ) ಇಂ. ಮತ್ತು (೩ಕ + ೨ಗ + ೧) ಇಂ. ಇದ್ದು, ಉಳಿದ ಎರಡು ಬದಿಗಳು (೫ಕ − ೭ಗ + ೯) ಇಂ. ಮತ್ತು ೫(೪ಗ−೬ಕ+೧೨) ಇಂ. ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರಿ.

ಆರನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನ ವಯಸ್ಸು ಇಂದು ಅವನ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದ್ದು, ೯ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ, ಅದು ಮಗನ ಅಂದಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ತ್ರಿ ಪಟ್ಟು ಇತ್ತು. ಆದರೆ ಈಗ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{\text{೪}}{\text{೩}}(\text{೫ಯ} + \text{೨}) - \frac{\text{೪}}{\text{೬}}(\text{೭ಯ} - \text{೨}) = \text{೩ಯ} + \text{೧}.$

(ಆ) $\frac{\text{೮ಯ}-\text{೩ಕ್ಷ}}{\text{೫}} = \text{ಯ}-\text{ಕ್ಷ}+\text{೧}; \ \frac{\text{೪}(\text{೨ಯ}+\text{೩ಕ್ಷ})}{\text{೩}} = \frac{\text{೫ಯ}+\text{೬ಕ್ಷ}-\text{೩}}{\text{೨}}.$

೩. ಪ್ರಾರಂಭದ ತಿಂಗಳ ಪಗಾರವು (**ಸ**), ವರ್ಷದ ಬಢತಿಯು (**ಬ**), ಮತ್ತು ಯಾವದೇ ವರ್ಷ (**ವ**) ದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ತಿಂಗಳ ಪಗಾರವು (**ಪ**) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು **ಪ** ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಿರಿ. ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷ ೫೬ ರೂ. ಪಗಾರವು ಇದ್ದು, ವರ್ಷದ ಬಢತಿಯು ೫ ರೂ. ಇದ್ದರೆ, ೯ನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪಗಾರವು ಸಿಗಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೪೮ಕ^{೨} - ೪೨ಕ + ೯$.

(ಆ) $೧೬ಯ^{೨} - ೨೪ಯವ + ೩೦ವಕ್ಷ - ೨೫ಕ್ಷ^{೨}$.

(ಇ) $೬(೨ಯ + ೧)^{೨} + ೧೩(೨ಯ + ೧) - ೬೩$.

೫. $೧೬ಯ^{೨} - ೧೦೦ವ^{೨}$, $೮ಯ^{೨} - ೮ಯವ - ೩೦ವ^{೨}$, ಮತ್ತು $೧೨ಯ^{೨} - ೬೦ಯವ + ೭೫ವ^{೨}$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೬}{ಅ} + \frac{೮}{ಅ-೧} - \frac{೧೬}{ಅ^{೨}-೧}$.

೭. ಭೂಮಿಯ ಮೂರು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವುಳ್ಳ ತುಣುಕುಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೬ ವಾರು ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರಗಿಂತ ೫ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು, ಮೂರನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ ೯ ವಾರು ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಯು ಮೊದಲನೆಯದರ ಅಗಲಳತೆಗಿಂತ ೫ ವಾರ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಏಳನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಂದು ನಾಟಕದಲ್ಲಿ ೨ ರೂ, ೩ ರೂ, ಮತ್ತು ೫ ರೂ, ಹೀಗೆ ಮೂರು ದರಗಳ ತಿಕೀಟುಗಳು ಇದ್ದವು. ೫ ರೂ. ದರದ ತಿಕೀಟುಗಳ ನಾಲ್ಕು-ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೨೦ ಹೆಚ್ಚು ೩ ರೂ. ದರದ ತಿಕೀಟುಗಳು, ಮತ್ತು ಈ ಎರಡೂ ದರಗಳ ತಿಕೀಟುಗಳು ಎಷ್ಟು ಮಾರಲ್ಪಟ್ಟವೋ ಅವುಗಳ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ೪೦ ಹೆಚ್ಚು ೨ ರೂ. ದರದ ತಿಕೀಟುಗಳು ಮಾರಲ್ಪಟ್ಟವು. ಒಟ್ಟು

ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೧೪೦ ರೂ. ಗಳಾಯಿತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದ ಎಷ್ಟು ತಿಕೀಟುಗಳು ಮಾರಲ್ಪಟ್ಟವು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) ·೨೫ಯ + ·೩(೨·೪ಯ − ೮) = ·೪(ಯ − ·೩).

(ಆ) ೫(೩ಯ−೫ರ+೨)=೧೩(೨ಯ+೪ರ+೫); ೯ಯ−೮ರ=೨೬.

೩. ಹಿಂದಿನ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿಯ ಸೂತ್ರದ ಕರ್ತೃವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ **ವ** ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ೧೧೧ ರೂ. ತಿಂಗಳ ಪಗಾರವು ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಸಿಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) ಯ(ಯ−ಗ)−ವ(ವ−ಗ).

(ಆ) $೫೬ಪ^2 - ೫೨ಪಬ + ೧೨ಬ^2$.

(ಇ) $೨೭ಪ^3 - ೯ಪ^2ಮ + ಪಮ^2 - \frac{೧}{೨೭}ಮ^3$.

೫. $೪ಪ^3 - ೩೨ಬ^3$, $೧೨ಪ^2 - ೪೮ಬ^2$, ಮತ್ತು $೩೨ಪ^2 - ೮೦ಪಬ + ೩೨ಬ^2$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೪}{ಪ-ಮ} - \frac{೮}{ಮ-ಪ} - \frac{೬ಪ+೬ಮ}{ಪ^2-ಮ^2}$.

೭. ಶತಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿಗಿಂತ ೨ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ, ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬೪ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆದರೊಳಗಿಂದ ೨೯೭ ಕಳೆಯಲಾಗಿ, ಎಕ್ಕಂ ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ಎಂಟನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಂದು ಮೋಟಾರ ಗಾಡಿಯು ಮೊದಲು ತಾಸಿಗೆ ೩೫ ಮೈಲಿನಂತೆ ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ೩೦ ಮೈಲಿನಂತೆ ಒಂದು ಊರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ೩½ ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಅಂತರವನ್ನು ೩೦ ಮೈಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೨೫ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ೩೮ ಮಿನಿಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೨ಯ+೭}{೩} - \frac{೮-ಯ}{೫} + \frac{೫ಯ+೧}{೧೨} = ೪\frac{೨}{೩}$.

(ಆ) $.೬೫ಯ - ೧.೨ವ = .೨$; $೯ಯ - ೭.೨ವ = ೨೧.೬$.

೩. ಒಂದು ಖಾನಾವಳಿಯಲ್ಲಿ ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚು (**ಖ**) ರೂಪಾಯಿ. **ಸ** ಇದು ಊಟ ಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, **ಖ** = ೪೮೦ + ೫೨**ಸ** ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. **ಸ** ಇದು ಕರ್ತೃವು ಇರುವಂತೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ೨೧೪೪ ರೂ. ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚು ಇದ್ದಾಗ ಊಟ ಮಾಡುವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಷ್ಟಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೭೫ಯ^{೨} + ೭೦ಯ - ೮೦$.

(ಆ) $೨೭ಪ^{೩} - ೪೫ಪ^{೨}ಬ + ೭೫ಪಬ^{೨} - ೧೨೫ಬ^{೩}$.

(ಇ) $೪ಪ^{೪} + ೧೧ಪ^{೨}ಬ^{೨} + ೨೫ಬ^{೪}$.

೫. $೫೪ಪ^{೨}-೯೬ಮ^{೨}$, $೮೧ಪ^{೩}-೧೯೨ಮ^{೩}$, ಮತ್ತು $೧೮ಪ^{೨}-೪೮ಪಮ+೩೨ಮ^{೨}$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೫ಯ^{೨}-ಯ-೬}{೬ಯ^{೨}+೭ಯ-೫} \times \frac{೬ಯ^{೨}+೧೩ಯ+೫}{೫ಯ^{೨}-೧೧ಯ+೬}$.

೭. ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ವಯಸ್ಸಿನ ಸರಾಸರಿಯು ೧೩ ವರ್ಷಗಳು ೧೦ ತಿಂಗಳು ಇತ್ತು, ಅದು ೧೬ ವ., ೧೫ ವ. ೮ ತಿಂ., ೧೫ ವ. ೩ ತಿಂ., ಮತ್ತು ೧೬ ವ. ೧ ತಿಂ., ವಯಸ್ಸುಗಳ ನಾಲ್ಕು ಹೊಸ ಹುಡುಗರು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬಂದುದರಿಂದ ೧೪ ವರ್ಷಗಳಾಯಿತು. ಆದರೆ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹುಡುಗರು ಇದ್ದರು?

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ೪ ರೂ. ಗೆ ಚೌ. ವಾರು ಈ ದರದಿಂದ ಕೆಲವು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅದರೊಳಗಿನ ೫೦೦ ಚೌ. ವಾರು ತನ್ನ ಸಲುವಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ೭ ರೂ. ದರದಿಂದ ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ಸ್ವತಃದ ಸಲುವಾಗಿ ಜಾಗೆಯು ಪುಕ್ಕಟೆಯಾಗಿ ಸಿಕ್ಕಿದ್ದಲ್ಲದೇ ೪೬೦ ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದನು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೨}{೩}(೨ಯ+೧೩)+\frac{೨೫}{೬}(ಯ-೨)=\frac{೧}{೩}+\frac{೩}{೪}(೩ಯ-೨೬)$.

(ಆ) $೫ಯ-\frac{೪ಯ+೧೩ಕ್ಷ}{೭}=೭;\ ೩ಕ್ಷ+\frac{೨ಯ+ಕ್ಷ}{೫}=೪$.

೩. ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲವು (ಪ) ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು (ತ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ $ಪ = ೪\pi ತ^{೨}$ ಈ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲಿಂದ ೨.೮ ಫೂಟು ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. **ತ** ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಈ ಸೂತ್ರದ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ೧೫೪ ಚೌ. ಇಂ. ಪೃಷ್ಠಫಲವಿರುವ ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಎಷ್ಟಿರುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) $೨೪ಯ^{೨}+೨೮ಯ-೨೨೦$.

(ಆ) $ಪ^{೨}-೭ಅಪ-೬೪ಬ^{೨}+೫೬ಅಬ$.

(ಇ) $೧೬ಮ^{೪}+ಮ^{೨}+\frac{೧}{೧೬}$.

೫. $(೪ಯ-೫ರ)^{೩}+(೫ರ-೨ಯ)^{೩}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ೨ಯ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೬ಕ^{೨}+ಕ-೧೫}{೪ಕ^{೨}-೪ಕ-೩}-\frac{೧೨ಕ^{೨}+೧೩ಕ-೪}{೮ಕ^{೨}+೨ಕ-೧}$.

೭. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ೫ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಕೆಲವನ್ನು ೪ ದರದಿಂದ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟನು. ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಈ ಹಣದ ಮೇಲೆ ಅವನಿಗೆ ಒಟ್ಟು ೪೩೦ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ಸಿಕ್ಕಿತು. ಮೊದಲನೇ ರಕಮು ಬರೇ ೪ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೩½ ದರದಿಂದ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಬಡ್ಡಿಯು ೩೬೫ ರೂ. ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ರಕಮನ್ನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇಟ್ಟಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಹತ್ತನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಒಬ್ಬ ಒಕ್ಕಲಿಗನು ಸಂತೆಯ ದಿವಸ ಎರಡು ಎತ್ತುಗಳನ್ನು ೧೧೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಮತ್ತು ತನ್ನ ಊರಿಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ತಂದು, ಒಂದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೦ ಲಾಭದಿಂದ, ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೫ ಹಾನಿಯಿಂದ ಮಾರಿದನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೨೦ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎತ್ತನ್ನು ಅವನು ಎಷ್ಟಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೫ನ-೩}{೭}+\frac{೩ನ+೨}{೨}=\frac{೧೫ನ-೬}{೪}-\frac{೭ನ-೨}{೧೨}$.

(ಆ) $\frac{ಯ+ವ}{೧೫}+\frac{೨ಯ+೩ವ}{೧೨}=೧\frac{೧}{೩}$; $\frac{೫ಯ-೩ವ}{೯}-\frac{೪ವ-ಯ}{೫}=೦$.

೩. ತಳವು ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಭಾಗವು ಚೌರಸವಿರುವ ಸಮಕೋನಚಿತಿಯ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲವು (**ಕ್ಷ**), ಅದರ ಎತ್ತರವು (**ಎ**) ಮತ್ತು ತಳದ ಬದಿಗಳ ಉದ್ದಳತೆಯು (**ಉ**), ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತ-ಮಾಡಿರಿ. ತಳದ ಬದಿಯು ೮ ಇಂ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ೧೦$\frac{೧}{೨}$ ಇಂ. ಇದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲವೆಷ್ಟಿರುವದು?

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ: (ಅ) $(೭ಯ-೯ರ)^{೨}+೨೫೨ಯರ$.

(ಆ) ಕಗ − ೫ಕ + ಗ − ೫.

(ಇ) $೪೨ಯ^{೨}-೩೫ಯ-೪೨$.

೫. $೩ನ^{೨}-೨೧ನ+೩೦$, $೯ನ^{೨}+೨೭ನ-೯೦$, ಮತ್ತು $೧೩೨ನ^{೨}-೧೦೮ನ-೩೧೨$ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ: $\frac{೫}{ಪ-೮}-\frac{೫}{ಪ+೮}+\frac{ಪ-೮೮}{ಪ^{೨}-೬೪}$.

೭. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜಿ-ನಲ್ಲಿ ೩ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ೫ ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿಂದ ೧೮ ಕಳೆದರೆ ಅದು ತಿರುವು ಮುರುವು ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಮೂರು ಕ್ರಮವಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಮೊದಲನೆಯದು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದು, ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಲ್ಲಿ ೨೫ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿನಷ್ಟು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೯-ಯ}{೫}+\frac{೧೮-೫ಯ}{೨}+\frac{೩(೭ಯ-೧೫)}{[illegible]}-೧\frac{೧}{೧೨}=೮\frac{೧}{೩}$.

(ಆ) $೮ಯ+\frac{೩ರ-೪ಯ}{೫}+೬=೦$; $೯ರ-\frac{೨ಯ+೫ರ}{[illegible]}=೧೬$.

೩. ಹಿಂದಿನ ಪತ್ರಿಕೆಯೊಳಗಿನ ಸೂತ್ರದ, ಎ ಇದನ್ನು ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ತಳವು ೬ ಇಂ. ಭುಜದ ಚೌರಸವಿದ್ದು ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲವು ೨೪೦ ಚೌ. ಇಂ. ಇರುವ ಡಬ್ಬಿಯ ಎತ್ತರವು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು?

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

(ಅ) ೬೪ರ^{೩} + ೩೩೬ರ^{೨}ಸ + ೫೮೮ರಸ^{೨} + ೩೪೩ಸ^{೩}.

(ಆ) ೮ಪ^{೨} − ೬ಪಮ − ೨೭ಮ^{೨} + ೨೦ಪ − ೪೫ಮ.

(ಇ) ೩೬ಕ^{೨} − ೬೦ಕಗ + ೨೫ಗ^{೨} − ೬ಕ + ೫ಗ − ೨.

೫. ೫ತ^{೨} + ೮೦ತನ + ೩೨೦ನ^{೨}, ೩ತ^{೨} − ೧೯೨ನ^{೨}, ಮತ್ತು ೩೦ತ^{೨} + ೨೫ತನ − ೧೨೦ನ^{೨} ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ:

$$\frac{೧}{ಯ^{೨}-೪ಯ+೪}\quad\frac{೨}{ಯ^{೨}-೪}+\frac{೧}{ಯ^{೨}+೪ಯ+೪}.$$

೭. ಮೂರು ಮಂದಿ ಒಕ್ಕಲಿಗ ಬಂಧುಗಳು ಪಾಲು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದರು. ಆಗ ಅವರ ಹತ್ತರ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯ ನಾಲ್ಕು ಆಕಳುಗಳು, ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯ ನಾಲ್ಕು ಎತ್ತುಗಳು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಎಮ್ಮೆ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೪೫೦೦ ರೂ. ಬೆಲೆಯ ೯ ದನಗಳಿದ್ದವು. ಪಾಲು ಸರಿಯಾಗಿ ಆಗುವದಕ್ಕಾಗಿ ಒಬ್ಬನಿಗೆ ಒಂದು ಆಕಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಎತ್ತುಗಳು, ಎರಡನೆಯವನಿಗೆ ಮೂರು ಆಕಳುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಎತ್ತು, ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯವನಿಗೆ ಎಮ್ಮೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಎತ್ತು, ಹೀಗೆ ಬರುವಂತೆ ಪಾಲು ಮಾಡಿದರು. ಆದರೆ ಆಕಳು, ಎತ್ತು ಮತ್ತು ಎಮ್ಮೆ ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಹನ್ನೆರಡನೆಯ ಪತ್ರಿಕೆ.

೧. ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಕ್ಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯವಿದ್ದು ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಒಂಬತ್ತು ಇದೆ. ಶತಂ ಮತ್ತು ದಹಂ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅಂಕೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೯೦ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: (ಅ) $\frac{೧}{೨}$(ಯ − ೨) + $\frac{೧}{೫}$(೨ಯ − ೩) − $\frac{೧}{೪}$(೩ಯ − ೪) + $\frac{೧}{೧೧}$(೪ಯ − ೫) = ೧.

(ಆ) $\frac{೭ರ − ೩ಸ}{೫} = \frac{೩ರ + ೨ಸ}{೩} − ೩$; $\frac{೮ರ + ೩ಸ}{೫} = \frac{೪ಸ − ೯ರ}{೬} + ೬$.

೩. ಯಾವದೇ **ಬಹುಭುಜ** ಆಕೃತಿಯ **ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು** (ಬ), ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಭ) ದ **ಇಮ್ಮಡಿ** ಉಣಾ **ನಾಲ್ಕು ಕಾಟಕೋನಗಳಿರುತ್ತದೆ.** ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು **ಬ = ೨ಭ − ೪** ಈ ಸೂತ್ರವು ವ್ಯಕ್ತ-ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಭ ಕರ್ತೃವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಈ ಸೂತ್ರದ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು ೧೬ ಕಾಟಕೋನಗಳಿದ್ದರೆ ಆಕೃತಿಯು ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳುಳ್ಳದ್ದು ಇರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ: (ಅ) ೬೪ಪ^{೩} − (೩ಪ − ೨)^{೩}.
(ಆ) ೪ಯ^{೪} − ೧೭ಯ^{೨} + ೪.
(ಇ) ೭೨ನ^{೨} − ೩೬ನ − ೨೦.

೫. ೧೬ಪ^{೪} − ೨ಪ, ೧೦೦ಪ^{೨} − ೪ಪ − ೨೩, ಮತ್ತು ೧೬ಪ^{೩} − ೨೪ಪ^{೨} + ೧೨ಪ − ೨ ಇವುಗಳ **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ:

$$\frac{.... \quad .... \quad ....}{ಪ^{೨} − ೮ಪ + ೧೫} = \frac{ಪ^{೨} + ೨ಪ − ೩}{ಪ^{೨} − ೪ಕ + ೩} = \frac{ಪ^{೨} − ಪ − ೧೨}{.... \quad .... \quad ....}.$$

೭. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ಮೂರು ಆಕಳುಗಳನ್ನು ಸಂತೆಯ ದಿನ ಒಂದು ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೦ ಲಾಭದಿಂದ, ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೫ ಲಾಭದಿಂದ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೫ ಲಾಭದಿಂದ ತನ್ನ ಊರಿನಲ್ಲಿ ಮಾರಿದನು. ಒಟ್ಟು ೧೧೧ ರೂ. ಲಾಭವಾಯಿತು. ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಆಕಳುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೭ ಮತ್ತು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೦ ಲಾಭ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾರಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ಕ್ಕೆ ೧೫ ಹಾನಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಮಾರಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ಕೇವಲ ೧ ರೂ. ಲಾಭ-ವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಕಳನ್ನು ಎಷ್ಟಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದನು?

ಮಹತ್ವದ ಬೈಜಿಕ ಸೂತ್ರಗಳು

ಈಗಿನ ವರೆಗೆ ಬಂದ **ಗುಣಕ-ವಿಷಯವಾದ** ಮತ್ತು **ವಿಸ್ತಾರ—** ವಿಷಯವಾದ ಎಲ್ಲ ಮುಖ್ಯ **ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು** ಕೆಳಗೆ ಒಂದೇ ಕಡೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಬೀಜಗಣಿತದ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯು ಆಗಬೇಕೆಂದು ಇಚ್ಛೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರು ಈ ಎಲ್ಲ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಚನ್ನಾಗಿ ಅರಗಿಸಿ-ಕೊಳ್ಳುವದು ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಿರುವದು. **ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಗ್ಗಿಗಳಿಗೆ** ಮಹತ್ವವಿರುವಂತೆ ಈ **ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ** ಮಹತ್ವವಿದೆ. **ಮಗ್ಗಿಗಳು** ಚನ್ನಾಗಿ ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ ಮುಂತಾದವು-ಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಈ **ಸೂತ್ರ-ಗಳನ್ನು** ಚನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಜಾಣತನದಿಂದ ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬಂದರೆ, ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$$(\text{ಪ} + \text{ಬ})^{\text{೨}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೨}} + \text{೨ಪಬ} + \text{ಬ}^{\text{೨}}$$

$$(\text{ಪ} - \text{ಬ})^{\text{೨}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೨}} - \text{೨ಪಬ} + \text{ಬ}^{\text{೨}}$$

$$(\text{ಪ} + \text{ಬ})(\text{ಪ} - \text{ಬ}) \equiv \text{ಪ}^{\text{೨}} - \text{ಬ}^{\text{೨}}$$

$$(\text{ಯ} + \text{ಪ})(\text{ಯ} + \text{ಬ}) \equiv \text{ಯ}^{\text{೨}} + (\text{ಪ} + \text{ಬ})\text{ಯ} + \text{ಪಬ}$$

$$(\text{ಯ}+\text{ಪ})(\text{ಯ}+\text{ಬ})(\text{ಯ}+\text{ಮ}) \equiv \text{ಯ}^{\text{೩}} + (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})\text{ಯ}^{\text{೨}} + (\text{ಪಬ}+\text{ಬಮ}+\text{ಮಪ})\text{ಯ} + \text{ಪಬಮ}$$

$$(\text{ಪ} + \text{ಮ})^{\text{೩}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೩}} + \text{೩ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ} + \text{೩ಪಮ}^{\text{೨}} + \text{ಮ}^{\text{೩}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೩}} + \text{ಮ}^{\text{೩}} + \text{೩ಪಮ}(\text{ಪ} + \text{ಮ})$$

$$(\text{ಪ} - \text{ಮ})^{\text{೩}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೩}} - \text{೩ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ} + \text{೩ಪಮ}^{\text{೨}} - \text{ಮ}^{\text{೩}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೩}} - \text{ಮ}^{\text{೩}} - \text{೩ಪಮ}(\text{ಪ} - \text{ಮ})$$

$$\text{ಪ}^{\text{೩}} + \text{ಮ}^{\text{೩}} \equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ})^{\text{೩}} - \text{೩ಪಮ}(\text{ಪ} + \text{ಮ}) \equiv (\text{ಪ} + \text{ಮ})(\text{ಪ}^{\text{೨}} - \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^{\text{೨}})$$

$$\text{ಪ}^{\text{೩}} - \text{ಮ}^{\text{೩}} \equiv (\text{ಪ} - \text{ಮ})^{\text{೩}} + \text{೩ಪಮ}(\text{ಪ} - \text{ಮ}) \equiv (\text{ಪ} - \text{ಮ})(\text{ಪ}^{\text{೨}} + \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^{\text{೨}})$$

$$(\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^{\text{೨}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೨}} + \text{ಬ}^{\text{೨}} + \text{ಮ}^{\text{೨}} + \text{೨ಪಬ} + \text{೨ಪಮ} + \text{೨ಬಮ}$$

$$(\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^{\text{೩}} \equiv \text{ಪ}^{\text{೩}}+\text{ಬ}^{\text{೩}}+\text{ಮ}^{\text{೩}}+\text{೩ಪಬ}(\text{ಪ}+\text{ಬ}) + \text{೩ಬಮ}(\text{ಬ}+\text{ಮ})+\text{೩ಪಮ}(\text{ಪ}+\text{ಮ})+\text{೬ಪಬಮ}$$

$$\text{ಪ}^{\text{೪}}+\text{ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ}^{\text{೨}}+\text{ಮ}^{\text{೪}} \equiv (\text{ಪ}^{\text{೨}}+\text{ಪಮ}+\text{ಮ}^{\text{೨}})(\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{ಪಮ}+\text{ಮ}^{\text{೨}})$$

ಉತ್ತರಗಳು

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧. ಪು. ೮-೧೫.

೧. ೧೨೦೦ ರೂ.; ೮೦೦ ರೂ. ೨. ೬೦ ವಾರು, ೪೦ ವಾರು; ೧೦೦ ವಾರು, ೫೦ ವಾರು. ೩. ೩೦ ಮೈ. ೪. ೪೦೦೦ ರೂ.; ೧೨೦೦೦ ರೂ. ೫. ೭೦ ರತ್ತಲು. ೬. ೫೬೭. ೭. ೨೮; ೩೬. ೮. ೪೮ ರೂ.; ೬೪ ರೂ. ೯. ೧೮ ಇಂ.; ೧೨ ಇಂ. ೧೦. ೨೫ ಮೈ.; ೩೫ ಮೈ. ೧೧. ೨೪೬. ೧೨. ೫೦. ೧೩. ೭ ಮೈ. ೧೪. ೨॥ ರೂ.; ೧೨ ಆ. ೧೫. ೫೦ ಡ.; ೧೫೦ ಡ. ೧೬. ೮೦೦ ರೂ.; ೧೨೦೦ ರೂ. ೧೭. ೧೦॥ ಮೈ ೧೮. ೫೩೪. ೧೯. ೪೦೦೦ ರೂ. ೨೦. ೨೪೦೦೦ ರೂ.; ೨೬೦೦೦ ರೂ. ೨೧. ೪೬೮. ೨೨. ೪ಡ.; ೧೨ಡ.; ೨೪ಡ. ೨೩. ೬೦; ೩೬. ೨೪. ೨ ರೂ. ೧ ಆ. ೨೫. ೪೮ ಶೇರು. ೨೬. ೫೨. ೨೭. ೮೪. ೨೮. ೧೫ ಮೈ. ೨೯. ೧೦೦. ೩೦. ೬೪; ೬೫. ೩೧. ೫೦ ಮೈ. ೩೨. ೧೦ ವ.; ೧೪ ವ.; ೪೮ವ. ೩೩. ೭೦೫. ೩೪. ೧೫೦೦ ಚೌರಸ ವಾರು. ೩೫. ೪೨ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ. ೩೬. ೯೦೦೦ ರೂ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨. ಪು. ೧೮-೨೦.

೧. ೨. ೨. ೪. ೩. ೧. ೪. ೫. ೫. ೩. ೬. $\frac{೧}{೪}$. ೭. ೨$\frac{೧}{೭}$. ೮. ೮. ೯. ೪$\frac{೨}{೩}$. ೧೦. ೪. ೧೧. ೧೩. ೧೨. ೭. ೧೩. ೫. ೧೪. ೨. ೧೫. ೨$\frac{೨}{೩}$. ೧೬. ೨. ೧೭. ೯$\frac{೧}{೪}$. ೧೮. ೨. ೧೯. −೧೨$\frac{೨}{೫}$. ೨೦. $\frac{೧}{೭}$. ೨೧. $\frac{೧}{೩}$. ೨೨. −೪. ೨೩. $\frac{೧}{೪}$. ೨೪. −೪. ೨೫. ೦. ೨೬. ೭. ೨೭. ೩$\frac{೩}{೪}$. ೨೮. ೧. ೨೯. ೬. ೩೦. ೦·೯. ೩೧. ೧$\frac{೩}{೪}$. ೩೨. −೧$\frac{೧}{೪}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩. ಪು. ೨೯.

೧. ೨, ೩. ೨. ೩, ೨. ೩. ೧, ೩. ೪. ೧೦, ೮. ೫. −೧, ೨. ೬. ೧೦, −೬. ೭. ೩, ೨. ೮. ೨, ೮. ೯. ೫, ೬. ೧೦. ೮, ೪. ೧೧. ೨, −೧. ೧೨. ೧, −೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪. ಪು. ೩೦.

೧. ೩, ೨. ೨. ೧, ೨. ೩. ೧, ೩. ೪. $\frac{೧}{೭}$, ೨. ೫. $\frac{೧}{೭}$, ೭. ೬. ೨, ೧೦. ೭. ೫, −೩. ೮. ೨, ೨. ೯. ೩, ೨. ೧೦. ೫, ೪. ೧೧. ೨, −೧. ೧೨. $\frac{೧}{೭}$, ೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೫. ಪು. ೩೨, ೩೩.

೧. ೨, ೧. ೨. ೩, ೨. ೩. ೪, ೨. ೪. ೩, ೨. ೫. ೪, ೩. ೬. ೫, ೨. ೭. ೩, ೨. ೮. ೫, ೧. ೯. ೨, ೨. ೧೦. ೬, ೨. ೧೧. ೨, $\frac{೧}{೩}$. ೧೨. $\frac{೧}{೭}$, ೧. ೧೩. ೬, ೨. ೧೪. ೫, −೩. ೧೫. $\frac{೧}{೭}$, ೨. ೧೬. $\frac{೧}{೫}$, ೩. ೧೭. $\frac{೧}{೫}$, ೧. ೧೮. $\frac{೧}{೩}$, −೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬. ಪು. ೩೫, ೩೬.

೧. ೧, ೨. ೨. ೨, ೧. ೩. ೩, ೧. ೪. ೨, ೨. ೫. ೩, ೪. ೬. ೧/೨, –೧. ೭. ೧, ೨. ೮. ೩, ೪. ೯. ೧, ೩. ೧೦. ೨೧/೨, ೪. ೧೧. ೧/೩, ೫. ೧೨. ೨, ೧/೨. ೧೩. ೧/೭, ೨. ೧೪. ೧/೫, ೫. ೧೫. ೧, ೨. ೧೬. ೧/೪, ೨. ೧೭. –೨, ೧. ೧೮. –೩, –೨. ೧೯. –೫, ೧. ೨೦. ೬, –೨. ೨೧. –೧/೨, –೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೭. ಪು. ೩೯.

೧. ೩, ೨. ೨. ೨, ೧. ೩. ೧, ೨. ೪. ೪, ೫. ೫. ೨, ೩. ೬. ೧/೨, ೧. ೭. –೨, ೧. ೮. ೧೦, ೨. ೯. –೩, –೨. ೧೦. ೧/೫, ೧/೪. ೧೧. ೧, ೧/೭. ೧೨. ೨, ೧/೭.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೮. ಪು. ೪೧.

೧. ೨, ೫. ೨. ೧, ೨. ೩. ೩, ೨. ೪. ೫, ೩. ೫. ೨, ೧. ೬. ೧/೨, –೧. ೭. ೧/೩, ೨. ೮. ೧/೩, –೧/೨. ೯. ೮, –೨. ೧೦. –೨, –೩. ೧೧. ೧/೨, ೧/೪. ೧೨. ೧/೪, ೧/೫.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೯. ಪು. ೪೫, ೪೬.

೧. ೪, ೬. ೨. ೧೨, ೪. ೩. ೧೬, ೨೦. ೪. ೮, ೨. ೫. ೯, ೩. ೬. –೩, –೧. ೭. ೭, ೨. ೮. ೫, ೮. ೯. ೨, ೩. ೧೦. ೧, ೨. ೧೧. ೩, ೪. ೧೨. ೪, ೬. ೧೩. ೧೦, ೫. ೧೪. ೦·೪, ೪. ೧೫. ೦·೨, ೦·೧. ೧೬. ೪, ೧. ೧೭. ೨, ೩. ೧೮. ೧, ೫. ೧೯. ೨, ೪. ೨೦. ೧, ೨. ೨೧. ೪, ೫. ೨೨. ೧/೫, –೧೧/೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೦. ಪು. ೪೭–೫೩.

೧. ೩೩, ೨೫. ೨. ೨೮, ೧೮. ೩. ೩೯, ೧೯. ೪. ೩೦ವ.; ೨೧ವ. ೫. ೨೯೦; ೧೯೯೪. ೬. ೮೧; ೬೪. ೭. ೫॥ ರೂ.; ೭ ರೂ. ೮. ೨ ಆ.; ೩೧/೨ ಆ. ೯. ೧೨೦೦೦ ರೂ.; ೮೦೦೦ ರೂ. ೧೦. ೩೬ವ; ೩೨ವ. ೧೧. ೪ ಮೈ.; ೧ ಮೈ. ೧೨. ೬೩. ೧೩. ೪೦ ಶೇರು; ೩೫ ಶೇರು. ೧೪. ೨।।। ರೂ.; ೩ ರೂ. ೧೫. ೮ವ.; ೩೫ವ. ೧೬. ೪೮ರ; ೫೨ರ. ೧೭. ೧೦ ಶೇರು, ೫ ಶೇರು; ೧೫ ಶೇರು, ೧೦ ಶೇರು. ೧೮. ೨೫. ೧೯. ರಾಮು, ೧೩ ವರ್ಷ; ಗೋವಿಂದ, ೧೨ ವರ್ಷ. ೨೦. ೨೪. ೨೧. ೨೪; ೧೬. ೨೨. ೬೪; ೨೮; ೮. ೨೩. ೩೬; ೫೨. ೨೪. ೧೬೦೦೦ ರೂ.; ೨೪೦೦೦ ರೂ. ೨೫. ೪೦೦೦೦ ರೂ.; ೬೦೦೦೦ ರೂ. ೨೬. ೨೪; ೬೦. ೨೭. ೧೧೨॥ ರೂ. ೨೮. ೩೦೨೪ ರೂ. ೨೯. ೪೦ವ.; ೨೫ವ. ೩೦. ೧೮; ೧೪. ೩೧. ೬೫°; ೬೫°; ೫೦°. ೩೨. ೫೦೮. ೩೩. ೧೬ವ.; ೬೪ವ. ೩೪. ೭೨; ೪೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೧. **ಪು. ೬೦–೬೩.**

೧. $ಕ್ಷೆ=\frac{(ಪ+ಬ)ಲ}{೨}$; ೬೭೫ ಚೌ. ಇಂ., $ಲ=\frac{೨ಕ್ಷೆ}{ಪ+ಬ}$; ೬ ಇಂ. ೨. $ಕ್ಷೆ=ತಎ$; ೧೨೦ ಚೌ. ಇಂ.; $ತ=\frac{ಕ್ಷೆ}{ಎ}$. ೩. $ಕ್ಷೆ=೬ಬ^೨$; ೧೩೫ ಚೌ. ಫೂ.; $ಬ=\sqrt{\frac{ಕ್ಷೆ}{೬}}$; ೧೩ ಫೂ. ೪. $ಘ=\pi ಎತ^೨$; ೧೨೮π ಘ. ಇಂ.; $ಎ=\frac{ಘ}{\pi ತ^೨}$; ೬ ಇಂ. ೫. $ಕ್ಷೆ=೨\pi ಎತ$; $ಪ=೨\pi ತ(ಎ+ತ)$; ೬೪π ಚೌ.ಇಂ.; ೯೬π ಚೌ.ಇಂ.; $ಎ=\frac{ಕ್ಷೆ}{೨\pi ತ}$; $ಎ=\frac{ಪ}{೨\pi ತ}-ತ$; ೧೩೨ ಚೌ. ಇಂ. ೨೦೯ ಚೌ. ಇಂ. ೬. ೨೮೮೦; $ಸ=\frac{೬೩೩೬೦ಅ}{\pi ವ್ಯಾ}$. ೭. $ತ=\frac{೨ಕ್ಷೆ}{ಎ}$; $ಎ=\frac{೨ಕ್ಷೆ}{ತ}$; ೬ ಇಂ.; ೭ ಇಂ. ೮. $ಉ=\frac{ಘ}{ಎಅ}$; $ಅ=\frac{ಘ}{ಉಎ}$; $ಎ=\frac{ಘ}{ಉಅ}$; ೧೮ ಇಂ. ೯. $ಅ=೧೬ಕ^೨$; ೧೪೪ ಫೂ. ೧೦. $ಪ=೬೦+೫ವ$; ೧೪೦ ರೂ.; $ವ=\frac{ಪ}{೫}-೧೨$; ೧೨ವ. ೧೧. $ಕ್ಷೆ=೨\pi ಅತ+\pi ಅ^೨$; ೪೭೭೪ ಚೌ. ಫೂ.; $ತ=\frac{ಕ್ಷೆ-\pi ಅ^೨}{೨\pi ಅ}$; ೧೪೦ ಫೂ. ೧೨. ೨೩೪; $ಪ=\frac{೨ಬ+ಸ-ಸ^೨}{೨ಸ}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೨. **ಪು. ೭೦.**

೧. $ಪ^೩+೧೫ಪ^೨ಮ+೭೫ಪಮ^೨+೧೨೫ಪ^೩$. ೨. $೬೪ಕ^೩+೪೮ಕ^೨ಗ+೧೨ಕಗ^೨+ಗ^೩$. ೩. $೨೭ಪ^೩-೨೭ಪ^೨ಮ+೯ಪಮ^೨-ಮ^೩$. ೪. $ಯ^೩-೬ಯ^೨ರ+೧೨ಯರ^೨-೮ರ^೩$. ೫. $೨೭ಪ^೩+೫೪ಪ^೨ಮ+೩೬ಪಮ^೨+೮ಮ^೩$. ೬. $೬೪ಯ^೩-೧೪೪ಯ^೨ರ+೧೦೮ಯರ^೨-೨೭ರ^೩$. ೭. $೨೧೬ಪ^೩-೫೪೦ಪ^೨ರ+೪೫೦ಪರ^೨-೧೨೫ರ^೩$. ೮. $೩೪೩ಪ^೩+೨೯೪ಪ^೨ಬ+೮೪ಪಬ^೨+೮ಬ^೩$. ೯. $೬೪ಯ^೩+೨೪೦ಯ^೨+೩೦೦ಯ+೧೨೫$. ೧೦. $೨೭ಪ^೩-೫೪ಪ^೨+೩೬ಪ-೮$. ೧೧. $ಬ^೬+೩ಬ^೪+೩ಬ^೨+೧$. ೧೨. $೨೭-೫೪ಯ^೨+೩೬ಯ^೪-೮ಯ^೬$. ೧೩. $೮ಪ^೬$

$+೬೦ಪ^{೪}ಬ+೧೫೦ಪ^{೨}ಬ^{೨}+೧೨೫ಬ^{೩}$. ೧೪. $೫೧೨-೫೭೬ಮ^{೨}+೨೧೬ಮ^{೪}-೨೭ಮ^{೬}$. ೧೫. $೨೭ಮ^{೬}+೫೪ಮ^{೪}+೩೬ಮ^{೨}+೮$. ೧೬. $ಪ^{೩}-೧೨ಪ^{೨}ಬ^{೩}+೪೮ಪಬ^{೬}-೬೪ಬ^{೯}$. ೧೭. $೬೪ಯ^{೩}-೧೨ಯ^{೨}ಲ+\frac{೩}{೪}ಯಲ^{೨}-\frac{೧}{೬೪}ಲ^{೩}$. ೧೮. $೧೨೫-೧೫ಗ+\frac{೩}{೫}ಗ^{೨}-\frac{೧}{೧೨೫}ಗ^{೩}$. ೧೯. $೨೭+೧೮ಯ+೪ಯ^{೨}+\frac{೮}{೨೭}ಯ^{೩}$. ೨೦. $ಪ^{೯}+ಪ^{೬}ಬ^{೨}+\frac{೧}{೩}ಪ^{೩}ಬ^{೪}+\frac{೧}{೨೭}ಬ^{೬}$. ೨೧. ೯೧೧೨೫. ೨೨. ೬೫೮೫೦೩. ೨೩. $\frac{೧೯೬೮೩}{೧೨೫}$. ೨೪. $\frac{೩೫೭೯೧೧}{೫೧೨}$. ೨೫. ಯ + ೫. ೨೬. ಕ್ಷ − ೭. ೨೭. ೨ಪ − ೫ಬ. ೨೮. ೬ಪ − ೭ಮ. ೨೯. ೪ರ − ೩ಲ. ೩೦. ೯ಕ + ೫ಗ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೩. ಪು. ೭೩, ೭೪.

೧. $ಯ^{೩}+೧೨೫$. ೨. $ಯ^{೩}-೩೪೩$. ೩. $೮ಯ^{೩}+೨೭$. ೪. $೨೭ರ^{೩}-೧೨೫$. ೫. $೧೨೫-೬೪ಕ^{೩}$. ೬. $೭೨೯+೮ಕ^{೩}$. ೭. $೧೨೫ಕ^{೩}-ಗ^{೩}$. ೮. $೫೧೨ಯ^{೩}-೧೨೫ಕ^{೩}$. ೯. $೩೪೩ಕ್ಷ^{೩}-\frac{೮}{೨೭}$. ೧೦. $೨೭ಕ್ಷ^{೩}+\frac{೧}{೨೭}$. ೧೧. $೧+\frac{೬೪}{೩೪೩}ಪ^{೩}$. ೧೨. $\frac{೮}{೨೭}ಪ^{೩}-\frac{೨೭}{೬೪}ಬ^{೩}$. ೧೩. $೬೪ಯ^{೩}ಕ್ಷ^{೩}+೧$. ೧೪. $೨೭-೬೪ಪ^{೩}ಬ^{೩}$. ೧೫. $೮ಪ^{೩}ಫ^{೩}-೨೭ಬ^{೩}ಮ^{೩}$. ೧೬. $೫೧೨ಯ^{೩}+೧೩೩೧ರ^{೩}ಲ^{೩}$. ೧೭. $೨೭ಯ^{೬}+೧೨೫ಕ್ಷ^{೬}$. ೧೮. $೮ಯ^{೯}-೨೭ಕ್ಷ^{೯}$. ೧೯. $೧೨೫ಪ^{೯}+೩೪೩ಬ^{೯}$. ೨೦. $೮ಪ^{೧೨}-೭೨೯ಬ^{೧೨}$. ೨೧. $೧೬ಯ^{೨}-೨೦ಯಲ+೨೫ಲ^{೨}$. ೨೨. ೩ರ − ೭ಲ. ೨೩. $೨೫+೪೫ಪ^{೨}+೮೧ಪ^{೪}$. ೨೪. ೧೧ಯ + ೬ರಲ. ೨೫. $೪೯ಪ^{೨}+೫೬ಪಕ್ಷ+೬೪ಕ್ಷ^{೨}$. ೨೬. $೪ಯ^{೨}+೧೪ಯಲ+೪೯ಲ^{೨}$. ೨೭. $೯ರ^{೨}-೧೫ರಲ+೨೫ಲ^{೨}$. ೨೮. $೧-೬ಯ^{೨}$. ೨೯. $೧೦೦ಕ್ಷ^{೪}-೯೦ಕ್ಷ^{೨}+೮೧$. ೩೦. ೬ಯಕ್ಷ−೫ಪ. ೩೧. ೮ಪ−೭ಲ. ೩೨. ೧೧ಲ + ೫ವ. ೩೩. ೪ಯ − ೯ಲ. ೩೪. $೨೭ಕ^{೩}-೫೧೨ಗ^{೩}$. ೩೫. $೧೨೫ಯ^{೩}+೩೪೩ಕ್ಷ^{೩}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೪. ಪು. ೭೬.

೧. $ಯ^{೩}+೧೩ಯ^{೨}+೫೦ಯ+೫೬$. ೨. $ಯ^{೩}-೯ಯ^{೨}+೨೩ಯ-೧೫$. ೩. $ಕ್ಷ^{೩}+೩ಕ್ಷ^{೨}-೬ಕ್ಷ-೮$. ೪. $ಮ^{೩}-೯ಮ^{೨}+೧೧ಮ+೨೧$. ೫. $ಪ^{೩}-೩೧ಪ+೩೦$. ೬. $೩೨+೪೪ಯ+೧೩ಯ^{೨}+ಯ^{೩}$. ೭. $೨೧೦-೧೨೧ಕ್ಷ+೨೦ಕ್ಷ^{೨}-ಕ್ಷ^{೩}$. ೮. $೮ಯ^{೩}+೩೬ಯ^{೨}+೪೬ಯ+೧೫$. ೯. $೨೭ಕ್ಷ^{೩}-೯೯ಕ್ಷ^{೨}$

+ ೧೧೪ಕ್ಷ − ೪೦. **೧೦.** ೬೪ಕ್ಷ^{೩} + ೧೪೪ಕ್ಷ^{೨} + ೪೦ಕ್ಷ − ೨೧. **೧೧.** ೧೨೫ಕ್ಷ^{೩} − ೨೦೦ಕ್ಷ^{೨} + ೪೫ಕ್ಷ + ೧೮. **೧೨.** ೩೪೩ಕ್ಷ^{೩} − ೨೧೭ಕ್ಷ + ೩೦. **೧೩.** ೮ಕ್ಷ^{೩} − ೨೬ಕ^{೨}ಕ್ಷ + ೧೨ಕ^{೩}. **೧೪.** ೬೪ಪ^{೩} − ೧೬ಕಪ^{೨} − ೧೬೪ಕ^{೨}ಪ + ೧೦೫ಕ^{೩}. **೧೫.** ೩೬ಗ^{೩}+೩೬ಗ^{೨}ಯ+೧೧ಗಯ^{೨}+ಯ^{೩}. **೧೬.** ೧೬೦ನ^{೩}−೯೨ನ^{೨}ಯ + ೧೭ನಯ^{೨} − ಯ^{೩}. **೧೭.** ೧೨೫ಯ^{೩} + ೨೫(೩ಕ + ೧೪ಗ)ಯ^{೨} + ೫(೪೨ಕಗ+೪೮ಗ^{೨})ಯ+೧೪೪ಕಗ^{೨}. **೧೮.** ೫೧೨ಯ^{೩}+೬೪(೩ಗ-೫ಘ-ಕ)ಯ^{೨} + ೮ (೫ಕಘ − ೩ಕಗ − ೧೫ಗಘ) ಯ + ೧೫ಕಗಘ. **೧೯.** ೫೬ಪಬಮ + ೩(೮ಪಬ+೧೪ಪಮ+೨೮ಬಮ)ಯ+೯(೨ಪ+೪ಬ+೭ಮ)ಯ^{೨}+೨೭ಯ^{೩}. **೨೦.** ೧೫ಪ^{೩} − ೯೨ಪ^{೨}ಯ + ೧೪೪ಪಯ^{೨} − ೬೪ಯ^{೩}.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೫. **ಪು. ೭೯, ೮೦.**

೧. ೨೫ಯ^{೨} + ೧೨೦ಯ + ೧೪೪. ೨. ೮೧ಯ^{೨} − ೧೨೬ಯ + ೪೯. **೩.** ೨೨೫ಪ^{೨} + ೬೦ಪಬ + ೪ಬ^{೨}. ೪. ೩೨೪ಪ^{೨} − ೧೮೦ಪಮ + ೨೫ಮ^{೨}. **೫.** ೧೬ಯ^{೨}+೨೫ರ^{೨}+೪ಲ^{೨}+೪೦ಯರ+೨೦ರಲ+೧೬ಯಲ. **೬.** ೯ಯ^{೨} +೪೯ರ^{೨}+೧೬ಲ^{೨}−೪೨ಯರ−೫೬ರಲ+೨೪ಯಲ. **೭.** ೪ಕ^{೨}+೨೫ಗ^{೨}+೯ಘ^{೨} −೨೦ಕಗ + ೩೦ಗಘ − ೧೨ಕಘ. **೮.** ೯ಪ^{೨} + ೪೨ಪಬ + ೪೯ಬ^{೨} + ೧೨ಪ +೨೮ಬ+೪. **೯.** ೧೬ಕ^{೨}−೨೪ಕಗ+೯ಗ^{೨}+೫೬ಕ−೪೨ಗ+೪೯. **೧೦.** ೪೯ಪ^{೨} −೨೮ಪಬ + ೪ಬ^{೨} − ೧೪ಪ + ೪ಬ + ೧. **೧೧.** ೯−೨೪ಯ−೩೦ಕ್ಷ+೧೬ಯ^{೨} + ೪೦ಯಕ್ಷ + ೨೫ಕ್ಷ^{೨}. **೧೨.** ೪ − ೩೨ಯ + ೧೨ಕ್ಷ + ೬೪ಯ^{೨} − ೪೮ಯಕ್ಷ + ೯ಕ್ಷ^{೨}. **೧೩.** ಯ^{೪} + ೨ಯ^{೩} + ೩ಯ^{೨} + ೨ಯ + ೧. **೧೪.** ಕ್ಷ^{೪} + ೪ಕ್ಷ^{೩} + ೬ಕ್ಷ^{೨} + ೪ಕ್ಷ + ೧. **೧೫.** ಪ^{೪} − ೮ಪ^{೩} + ೨೪ಪ^{೨} − ೩೨ಪ + ೧೬. **೧೬.** ಪ^{೪} + ೪ಪ^{೩}ಬ + ೮ಪ^{೨}ಬ^{೨} + ೮ಪಬ^{೩} + ೪ಬ^{೪}. **೧೭.** ಯ^{೪}−೬ಯ^{೩}ಕ್ಷ +೧೫ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೨} −೧೮ಯಕ್ಷ^{೩} + ೯ಕ್ಷ^{೪}. **೧೮.** ೧೬ + ೧೬ಯ + ೧೨ಯ^{೨} + ೪ಯ^{೩} + ಯ^{೪}. **೧೯.** ೬೪ − ೬೪ಯ + ೬೪ಯ^{೨} − ೨೪ಯ^{೩} + ೯ಯ^{೪}. **೨೦.** ಯ^{೪}+೨ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೨}+ಕ್ಷ^{೪}+೮ಯ^{೨}+೮ಕ್ಷ^{೨}+೧೬. **೨೧.** ಮ^{೮} − ೨ಮ^{೬} − ಮ^{೪} + ೨ಮ^{೨} + ೧. **೨೨.** ಪ + ೩ಬ + ೪ಮ. **೨೩.** ೨ಕ − ೨ಖ + ೩ಗ. **೨೪.** ೫ಪ − ೨ಬ − ೩ಮ. **೨೫.** ೪ಯ − ರ + ೨ಲ. **೨೬.** − ೫ಲ; ೪ಯ^{೨} +೯ರ^{೨}+೧೨ಯರ−೩೦ರಲ. **೨೭.** −೨ಬ−ಮ; ೯ಪ^{೨}−೬ಪಮ. **೨೮.** ೨ಕ

+ ೩ಫ; + ೧೬ಗ^{೨} − ೨೪ಗಫ. **೨೯.** ೫ಪ^{೨} + ೫ಬ^{೨} + ೨೫ಮ^{೨} − ೨೨ಬಮ − ೪ಪಮ. **೩೦.** ೩ಯ^{೨} − ೯ರ^{೨} + ೫ಲ^{೨} − ೬ಯರ − ೪೪ರಲ + ೧೬ಯಲ. **೩೧.** ೬ಕ^{೨} + ೧೫ಗ^{೨} + ೧೯ಫ^{೨} + ೨೦ಕಗ − ೫೦ಗಫ + ೨೪ಕಫ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೬. ಪು. ೮೪.

೧. ಕ^{೨}+೨ಕಗ+ಗ^{೨}−ಫ^{೨}. ೨. ಕ^{೨}+೨ಕಫ+ಫ^{೨}−ಗ^{೨}. ೩. ಕ^{೨}−ಗ^{೨}+೨ಗಫ−ಫ^{೨}. ೪. ೯ಪ^{೨}+೨೪ಪಮ+೧೬ಮ^{೨}−ಬ^{೨}. ೫. ೨೫ಪ^{೨}−೪ಬ^{೨}+೪ಬಮ − ಮ^{೨}. ೬. ೪ಯ^{೨} − ೧೨ಯಲ + ೯ಲ^{೨} − ೧೬ರ^{೨}. ೭. ೯ಕ^{೨} − ೪೯ಗ^{೨} + ೧೧೨ಗಫ − ೬೪ಫ^{೨}. ೮. ೪೯ಲ^{೨}−೨೫ಯ^{೨}+೩೦ಯರ−೯ರ^{೨}. ೯. ಯ^{೪} − ೪ಯ^{೨}ರ^{೨} − ೮ಯರ^{೩} − ೪ರ^{೪}. ೧೦. ೯ಯ^{೪}−೭ಯ^{೨}ಲ^{೨}+ಲ^{೪}. ೧೧. ೨೫ಪ^{೪} − ೯ಪ^{೨}ಬ^{೨} + ೧೨ಪಬ^{೩} − ೪ಬ^{೪}. ೧೨. ೯ಗ^{೪} − ೪೯ಕ^{೨}ಗ^{೨} + ೮೪ಕ^{೩}ಗ−೩೬ಕ^{೪}. ೧೩. ಯ^{೪}+ಯ^{೨}+೧. ೧೪. ೧೬ಯ^{೪}+೪ಯ^{೨}+೧. ೧೫. ೮೧ಪ^{೪}+೯ಪ^{೨}+೧. ೧೬. ೨೫೬ಪ^{೪}+೧೪೪ಪ^{೨}+೮೧. ೧೭. ೬೨೫ಪ^{೪} + ೨೫ಪ^{೨}ಬ^{೨} + ಬ^{೪}. ೧೮. ೧೬ಯ^{೪} + ೧೦೦ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೨} + ೬೨೫ಕ್ಷ^{೪}. ೧೯. ೨೫ಯ^{೬}−೪ಯ^{೪}+೧೬ಯ^{೨}−೧೬. ೨೦. ೬೪ಕ್ಷ^{೬}+೪೮ಕ್ಷ^{೩}−೧೬ಯ^{೨}+೯. ೨೧. ೪ಯ^{೬} − ೧೬ಯ^{೪} + ೬೪ಯ^{೩} − ೨೫ಯ^{೨} + ೩೬. ೨೨. ಕ್ಷ^{೬} − ೪ಕ್ಷ^{೪} + ೨೪ಕ್ಷ^{೩} − ೬೪ಕ್ಷ^{೨} + ೮೪ಕ್ಷ − ೪೯. ೨೩. ೯ಕ್ಷ^{೮}−೪೯ಕ್ಷ^{೪} + ೧೨೬ಕ್ಷ^{೨}−೮೧. ೨೪. ೪ಕ^{೨} − ೨೫ಖ^{೨} − ೪೯ಗ^{೨} − ೬೪ಫ^{೨} + ೭೦ಖಗ+೧೧೨ಗಫ+೮೦ಖಫ. ೨೫. ೨೫೬ಯ^{೮} + ೧೨೯೬ಯ^{೪} + ೬೫೬೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೭. ಪು. ೮೯.

೧. ಕ^{೩} − ಗ^{೩} + ಫ^{೩} − ೩ಕಗ(ಕ − ಗ) + ೩ಗಫ(ಗ − ಫ) + ೩ಕಫ(ಕ + ಫ) − ೬ಕಗಫ. ೨. ತ^{೩} − ದ^{೩} − ನ^{೪} − ೩ತದ(ತ − ದ) − ೩ದನ(ದ + ನ) − ೩ತನ(ತ − ನ) + ೬ತದನ. ೩. ೮ಕ^{೩} + ೨೭ಗ^{೩} − ಫ^{೩} + ೧೮ಕಗ(೨ಕ + ೩ಗ) − ೯ಗಫ(೩ಗ − ಫ) − ೬ಕಫ(೨ಕ − ಫ) − ೧೮ಕಗಫ. ೪. ೧೨೫ಕ^{೩} − ೨೭ಗ^{೩} − ೮ಫ^{೩} − ೪೫ಕಗ (೫ಕ − ೩ಗ) − ೧೮ಗಫ(೩ಗ + ೨ಫ) − ೩೦ಕಫ(೫ಕ − ೨ಫ) + ೧೮೦ಕಗಫ. ೫. ೮ತ^{೩} − ೧೨೫ದ^{೩} + ೨೭ನ^{೩} − ೩೦ತದ(೨ತ − ೫ದ) + ೪೫ದನ(೫ದ − ೩ನ) + ೧೮ತನ(೨ತ + ೩ನ) − ೧೮೦ತದನ. ೬. ೫೧೨ಪ^{೩} − ಬ^{೩} − ೨೭ಮ^{೩} − ೨೪ಪಬ(೮ಪ − ಬ) − ೯ಬಮ(ಬ + ೩ಮ) − ೭೨ಪಮ(೮ಪ − ೩ಮ) + ೧೪೪ಪಬಮ.

೭. $ಪ^{೩} - ಬ^{೩} - ೭೨೯ಮ^{೩} - ೩ಪಬ(ಪ - ಬ) - ೨೭ಬಮ(ಬ + ೯ಮ) - ೨೭ಪಮ(ಪ - ೯ಮ) + ೫೪ಪಬಮ$. ೮. $೮ಪ^{೩}-ಬ^{೩}+೨೧೬ಮ^{೩}-೬ಪಬ(೨ಪ-ಬ)+೧೮ಬಮ(ಬ-೬ಮ)+೭೨ಪಮ(ಪ+೩ಮ)-೭೨ಪಬಮ$. ೯. $೨೭ಕ^{೩}-೩೪೩ಗ^{೩}-೬೩ಕಗ(೩ಕ-೭ಗ)+೪೫ಕ(೩ಕ+೫)+೧೦೫ಗ(೭ಗ-೫)-೬೩೦ಕಗ+೧೨೫$. ೧೦. $೧-೧೨೫ಪ^{೩}+೨೧೬ಬ^{೩}-೧೫ಪ(೧-೫ಪ)+೧೮ಬ(೧+೬ಬ)+೯೦ಪಬ(೫ಪ-೬ಬ)-೧೮೦ಪಬ$. ೧೧. $ಪ^{೬}-೩ಪ^{೫}+೬ಪ^{೪}-೭ಪ^{೩}+೬ಪ^{೨}-೩ಪ+೧$. ೧೨. $೮ಪ^{೬}-೪೮ಪ^{೫}+೬೦ಪ^{೪}+೮೦ಪ^{೩}-೯೦ಪ^{೨}-೧೦೮ಪ-೨೭$. ೧೩. $೮+೬೦ಪ+೧೩೮ಪ^{೨}+೬೫ಪ^{೩}-೬೯ಪ^{೪}+೧೫ಪ^{೫}-ಪ^{೬}$. ೧೪. $೨೭-೫೪ಪ-೭೨ಪ^{೨}-೮ಪ^{೩}+೯೬ಪ^{೪}-೯೬ಪ^{೫}-೬೪ಪ^{೬}$. ೧೫. $ಪ^{೬}+೩ಪ^{೫}ಬ-೫ಪ^{೩}ಬ^{೩}+೩ಪಬ^{೫}-ಬ^{೬}$. ೧೬. $೨೭ಪ^{೬} - ೫೪ಪ^{೫}ಬ + ೬೩ಪ^{೪}ಬ^{೨} - ೪೪ಪ^{೩}ಬ^{೩} + ೨೧ಪ^{೨}ಬ^{೪} - ೬ಪಬ^{೫} + ಬ^{೬}$. ೧೭. $೬೪ತ^{೬} - ೯೬ತ^{೫}ದ - ೯೬ತ^{೪}ದ^{೨} +೧೩೬ತ^{೩}ದ^{೩}+೭೨ತ^{೨}ದ^{೪}-೫೪ತದ^{೫}-೨೭ದ^{೬}$. ೧೮. $ಪ^{೯}+೯ಪ^{೭}+೩ಪ^{೬}+೨೭ಪ^{೫}+೧೮ಪ^{೪}+೩೦ಪ^{೩}+೨೭ಪ^{೨}+೯ಪ+೧$. ೧೯. $೮ಪ^{೯}-೪೮ಪ^{೮}+೯೬ಪ^{೭}-೧೦೦ಪ^{೬}+೧೪೪ಪ^{೫}-೧೪೪ಪ^{೪}+೫೪ಪ^{೩}-೧೦೮ಪ^{೨}-೨೭$. ೨೦. $೬೪ಕ^{೧೨}-೧೪೪ಕ^{೧೦}+೧೯೨ಕ^{೮}-೧೪೪ಕ^{೬}+೧೩೬ಕ^{೪}-೫೪ಕ^{೨}+೨೭$. ೨೧. $೮ಕ^{೧೨}-೩೬ಕ^{೧೦} + ೪೨ಕ^{೮} + ೯ಕ^{೬} - ೨೧ಕ^{೪} - ೯ಕ^{೨} - ೧$. ೨೨. $೧೨೫-೧೫೦ಪ^{೨}+೨೮೫ಪ^{೪} - ೧೮೮ಪ^{೬} + ೧೭೧ಪ^{೮} - ೫೪ಪ^{೧೦} + ೨೭ಪ^{೧೨}$. ೨೩. $೮ಪ^{೧೨}+೧೨ಪ^{೧೦}ಬ^{೨} + ೫೪ಪ^{೮}ಬ^{೪} + ೪೯ಪ^{೬}ಬ^{೬} + ೧೦೮ಪ^{೪}ಬ^{೮} + ೪೮ಪ^{೨}ಬ^{೧೦} + ೬೪ಬ^{೧೨}$. ೨೪. $ಯ^{೧೨} - ೬ಯ^{೧೦}ಕ್ಷ^{೨} + ೧೮ಯ^{೮}ಕ್ಷ^{೪} - ೩೨ಯ^{೬}ಕ್ಷ^{೬} +೩೬ಯ^{೪}ಕ್ಷ^{೮}-೨೪ಯ^{೨}ಕ್ಷ^{೧೦}+೮ಕ್ಷ^{೧೨}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೮. **ಪು. ೯೭.**

೧. ೫(ಯ+ಕ್ಷ). ೨. ೭(ಪ+ಮ). ೩. ೮(ಕ+ಗ). ೪. ೧೨(ರ+ಲ). ೫. ೨(ಪ–ಬ). ೬. ೯(ಪ–ಮ). ೭. ೧೧(ಯ–ಕ್ಷ). ೮. ೨(ಯ+೨ಕ್ಷ). ೯. ೩(ಯ–೨ಪ). ೧೦. ೭(ಕ–೨ಗ). ೧೧. ೮(ಯ+೩ಕ್ಷ). ೧೨. ೯(ಯ–೪ಕ್ಷ). ೧೩. ೨(೨ಪ+೩ಬ). ೧೪. ೨(೪ಬ–೭ಮ). ೧೫. ೩(೩ಕ–೫ಗ). ೧೬. ೪(೫ಯ+೭ಕ್ಷ). ೧೭. ೫(೫ಪ–೩ಮ). ೧೮. ೩(೯ಕ+೪ಗ). ೧೯. ೧೪(೩ಪ+೨ಬ). ೨೦. ೪(೧೬ಯ–೯ಕ್ಷ). ೨೧. ೪(೨ಯ–೧). ೨೨. ೪(೫ಕ್ಷ

+೨). ೨೩. ೪(೩+೭ಮ). ೨೪. ೧೩(೩-೪ನ). ೨೫. ೨ಅ(ಯ+ಕ್ಷ). ೨೬. ೫ಅ(ಯ-ರ). ೨೭ ೩ಅ(ಯ+೩ಕ್ಷ). ೨೮. ೨ಅ(೪ಪ-ಬ). ೨೯. ೫ಕಗ (ಯ+೩ಕ್ಷ). ೩೦. ಕಗ(೭ಬ+೧೧ಮ). ೩೧. ೩ಕ(೨ಗಯ-೫ಘಕ್ಷ). ೩೨. ೧೧ಪಮ(೨ಬ-೫ಯ). ೩೩. ೭(ಯ+ರ+ಲ). ೩೪. ೫(ಯ-ರ+ಕ್ಷ). ೩೫. ೪(ಯ+ಲ+ಕ್ಷ). ೩೬ ೮(ಪ-ಬ-ಮ). ೩೭. ೨(ಪ+೨ಬ+೩ಮ). ೩೮. ೩(೨ಕ+೩ಗ+ಘ). ೩೯. ೫(೩ಯ+೨ಲ+೫ಕ್ಷ). ೪೦. ೪(೨ತ-ದ+೩ನ). ೪೧. ೭(೨ಪ-೩ಬ+೪ಮ). ೪೨. ೩(೩ಯ-೬ರ-೨ಕ್ಷ). ೪೩. ೪(೯ಕ-೬ಖ +೪ಗ). ೪೪. ೩(೭ತ+೪ದ-೧೬ನ). ೪೫. ೩ಅ(ಯ+ರ+ಲ). ೪೬. ೪ಕ (ಪ-ಬ+ಮ). ೪೭. ೬ಗ(ಯ+ರ-ಕ್ಷ). ೪೮. ೯ಕ(ನ-ಪ-ಮ). ೪೯. ೫ಅ (ಯ+೨ರ+೫ಲ). ೫೦. ೭ಕ(೨ಪ-೩ಬ+೪ಮ). ೫೧. ೨ನ(೬ಪ-೧೫ಬ -೮ಮ). ೫೨. ೩ಯ(೨ಕ+೫ಗ+೪ಬ). ೫೩. ೮ಕ್ಷ(೨ಕ-ಗ+೪ಪ). ೫೪. ೩ಕಪ(೨ಯ-೧೦ಲ+೭ಕ್ಷ). ೫೫. ೨ಯಕ್ಷ(೧೪ಕ-೭ಗ-೩ಬ). ೫೬. ೪(೪ಯ-೨ರ+೩ಲ-೮ಕ್ಷ). ೫೭. ೪(೬ಯ-೧೨ರ-೧೮ಲ+೪ವ-೫ಕ್ಷ). ೫೮. ೫(೩ಕಪ-೫ಗಫ-೪ಘಬ+೨ಖಮ). ೫೯. ೪(೨ಕಯರ-೩ಗರಲ -೫ಘಲಯ). ೬೦. ೫ಪಬ(೪ಕಮ-೩ಗಯ+೬ಘರ-೫ತಕ್ಷ). ೬೧. ೪(೪-೫ಯ+೬ರ+೮ಲ-೨ಕ್ಷ). ೬೨. ೭(೨+೫ಕಯ-೩ಗರ-೪ಘವ+೭ಪಕ್ಷ). ೬೩. ೧೦೨೬೦೦. ೬೪. ೫೬೦೦. ೬೫. ೨೧೩೦೦೦. ೬೬. ೨೬೭೩೦೦. ೬೭. ೬೫೬೦೦೦. ೬೮. ೧೨೯೬೦೦. ೬೯. ೪೨೮೦೦. ೭೦. ೧೦೨೪೦೦. ೭೧. ೬೦೦. ೭೨. ೧೮೯. ೭೩. ೬೪. ೭೪. ೮೧. ೭೫. ೨೨ತ್ರಿ. ೭೬. ೧೬ತ್ರಿ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೯. ಪು. ೯೯.

೧. ಯಕ್ಷ(ಯ+ಕ್ಷ). ೨. ೬ಪಬ(ಪ+ಬ). ೩. ೪ಕಗ(ಕ+೩ಗ). ೪. ೪ಪಮ(೪ಪ+೩ಮ). ೫. ಪಫ(ಪ-ಫ). ೬. ೫ಅಕ್ಷ(ಅ-ಕ್ಷ). ೭. ೩ಪ^{೨}ಫ^೨(ಪ-೭ಫ). ೮. ೩ಯ^{೨}ರ^೨(೩ಯ^೨-೮ರ^೨). ೯. ಕಗಘ (ಕ+ಗ+ಘ). ೧೦. ಯರಕ್ಷ(ಯ^೨+ರ^೨+ಕ್ಷ^೨). ೧೧. ಯರಕ್ಷ(ಯರ -ರಕ್ಷ+ಕ್ಷ). ೧೨. ೪ಯಕ್ಷ(೨ಯ^೨-೫ಯಕ್ಷ-೩ಕ್ಷ^೨). ೧೩. ೫ಯ^{೨}ರ^{೨}ಲ^೨ (೪ಯ-೮ರ+೩ಲ). ೧೪. ೪ಅ(೬ಪಬ^೨+೩ಬಮ^೨-೭ಮಬ^೨).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೦. ಪು. ೧೧೧, ೧೧೨.

೧. (ಕ+ಘ)(೨ಯ+೫ರ). ೨. (೩ತ+೨ನ)(೪ಯ-೭ರ). ೩. (೨ಪ-೩ಮ)(೨ಯ+೭ವ). ೪. (೮ಕ-೩ಘ)(೩ಪ-೫ಮ). ೫. (ಯ-೪ವ)(ಯ+ವ). ೬. (೫ಯ+೪ರ)(೨ಯ-೭ರ). ೭. (ಯ-೮)(೩ಯ-೧೧). ೮. (೮-೩ರ)(೧೨+೫ರ). ೯. (ದ+ಧ+ನ)(೨ಯ-೫ರ). ೧೦. (೨ದ-೫ಧ+೬ನ)(೪ಯ+೭ವ). ೧೧. (ದ+ನ)(೩ಪ+೪ಫ-೭ಮ). ೧೨. (೫ದ-೭ನ)(೨ಪ-೪ಫ-೩ಮ). ೧೩. (ತ-ದ+ನ)(ಯ+ರ-ವ). ೧೪. (೫ತ+೭ದ-೯ನ)(೨ಯ-೪ರ-೭ಲ). ೧೫. (ಯ-೫)(೬ಯ^{2}-೯ಯರ+೪ರ^{2}). ೧೬. (೨ಯ-೭)(೩ಯ^{2}+೭ಯರ-೯ರ^{2}).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೧. ಪು. ೧೧೭, ೧೧೮.

೧. (ಅ+ಪ)(ಯ+ರ). ೨. (ಪ-ಮ)(೨ಯ-ಕ್ಷ). ೩. (೨ಕ-ಗ)(ಪ+ಮ). ೪. (೪ತ+೩ದ)(೨ಪ-ಮ). ೫. (೮ಕ-೩ಗ)(೪ಯ-೫ಕ್ಷ). ೬. (೨ಪ-೭ಮ)(೪ಯ+೩ರ). ೭. (ಗ-೪ಜ)(೩ಪ-೪ಮ). ೮. (೬ದ-೫ನ)(೩ಪ+೨ಮ). ೯. (೫ಕ+೨ಜ)(೨ರ+೭ಲ). ೧೦. (೩ಅ-೨ಜ)(೫ಪ-ಮ). ೧೧. (೪ಪ-ಬ)(೨ಲ+೫ವ). ೧೨. (೩ಮ+೨)(೪ಯ-೩ವ). ೧೩. (೮ಪ-೩ಮ)(೨ಯ-೫). ೧೪. (೭ಕ-೨)(೪ರ+ಲ). ೧೫. (೩ತ+೪)(೨ವ-ಕ್ಷ). ೧೬. (ಕ+೫)(ಗ+೬). ೧೭. (ಯ-೩)(ರ-ಲ). ೧೮. (ಪ+೬)(ಬ-೭). ೧೯. (ಜ-೧೧)(ನ+೮). ೨೦. (೨ಪ-೭)(೩ಯ-೪). ೨೧. (೮ಯ+೭)(೨ರ-೩). ೨೨. (ಅ+೨ಕ)(ಅ+೪ಗ). ೨೩. (ಮ+೫ಯ)(ಬ-೩ಯ). ೨೪. (ರ-೪ಪ)(೨ರ+೩ಬ). ೨೫. (೨ಯ-೫ಪ)(೩ಯ-೨ಮ). ೨೬. (೮ಯ+೫ಪ)(೨ಯ+ಬ). ೨೭. (೭ಯ-೨ಕ)(೨ಯ+೭ಗ). ೨೮. (ಪ-ಬ-ಮ)(ಯ-ಕ್ಷ). ೨೯. (ಕ-ಗ+ಘ)(ಯ+ಕ್ಷ). ೩೦. (ಅ-ಯ)(ಪ-೨ಬ+೩ಮ). ೩೧. (೨ಯ-೫ಕ್ಷ)(೨ಪ+೫ಬ-ಮ). ೩೨. (ಯ-೨ಅ)(ಯ-೪ಕ-೩ಗ). ೩೩. (೨ಪ+೩ಬ-ಮ)(ಯ-೨ಲ+ವ). ೩೪. (ಯ-ಕ+೨ಘ)(ಯ-೪ಪ+೩ಮ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨. ಪು. ೧೧೫, ೧೧೬.

೧. ಯ-೬. ೨. ೨ರ+೫. ೩. ೪ಲ+೭. ೪. ೫ಸ-೭. ೫. ೯-ರ. ೬. ೮+೩ಕ್ಷ. ೭. ೫ಪ+೨ಮ. ೮. ೬ಯ-೩ಲ. ೯. ೧೧ಪ-೯ರ.

೧೦. ೬ಪ+೧೦ಮ. ೧೧. ೭ಪ+೪ಬ. ೧೨. ೧೨ಪ−೫ಮ. ೧೩. ೪ಯ−೯ರ. ೧೪. ೧೦ರ−೩ಲ. ೧೫. ೧೧ಪ−೫ಮ. ೧೬. ೭ಯ−೩ರ. ೧೭. ೧೮. ಇಲ್ಲ. ೧೯. ೬+೧೧ಮ. ೨೦. ೯ನ+೧೬ಕ್ಷ. ೨೧. ೨೫ಯ−೪ಕ್ಷ. ೨೨. $\frac{೧}{೮}$−೪ಅಕ್ಷ. ೨೩. ೪ಪ^{೨}−೩ಮ^{೨}. ೨೪. ೫ಅ^{೨}+೩ಕ^{೨}. ೨೫. ೬ಕ+೭ಪ^{೨}. ೨೬. ೨ರ^{೨} −೫ಲ^{೩}. ೨೭. ೭ಯ^{೪} − ೧೪ಕ್ಷ^{೩}. ೨೮. ಯ+ರ. ೨೯. ೯ಪ+ಮ. ೩೦. ೪(ಪ+ಮ)+೫(ಯ+ರ). ೩೧. ೨೧ಯ+೧೯ರ+೮ಲ. ೩೨. (೫ಯ+೬ರ)(೫ಯ+೬ರ−೧). ೩೩. (೨ರ−೫ಲ)(೨ರ−೫ಲ−೭). ೩೪. (೪ಪ−$\frac{೧}{೩}$ಮ)(೪ಪ−$\frac{೧}{೩}$ಮ−೪). ೩೫. (ಯ+$\frac{೧}{ಯ}$)(ಯ+$\frac{೧}{ಯ}$+೩). ೩೬. (೩ಕ್ಷ−೨ಕ)(೩ಕ್ಷ−೨ಕ−೭). ೩೭. (೫ರ−೬ಸ)(೫ರ−೬ಸ−೨ಕ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೩. ಪು. ೧೨೦.

೧. (ಪ−೪)(ಪ+೪). ೨. (೫−ಮ)(೫+ಮ). ೩. (೬ಪ−೯ಮ)(೬ಪ+೯ಮ). ೪. (೮ಅ−೭ಕ)(೮ಅ+೭ಕ). ೫. (೧೪ಯ−೧೧ರ)(೧೪ಯ+೧೧ರ).
೬. (೧೫ಯ−೧೩ಲ)(೧೫ಯ+೧೩ಲ). ೭. (೧೨ರ − ೯ಸ)(೧೨ರ + ೯ಸ).
೮. (೮ಮ − ೧೫ನ)(೮ಮ + ೧೫ನ). ೯. (೧೯ಪ − ೧೦ಕ)(೧೯ಪ+೧೦ಕ).
೧೦. (೯ತ−೨೦ದ)(೯ತ+೨೦ದ). ೧೧. (೭ಯ−೨೯ಲ)(೭ಯ + ೨೯ಲ).
೧೨. (೧೯ರ − ೯ಸ)(೧೯ರ + ೯ಸ). ೧೩. (೨ಪ − ೩೧ಫ)(೨ಪ + ೩೧ಫ).
೧೪. (೧೦ಕ − ೩ಗ)(೧೦ಕ + ೩ಗ). ೧೫. (೧೫ಕ−೧೪ಜ)(೧೫ಕ+೧೪ಜ).
೧೬. ೨(೩ನ−೭ಮ)(೩ನ+೭ಮ). ೧೭. ೫(೨ಮ−೫ಯ)(೨ಮ+೫ಯ).
೧೮. ೩(೬ಯ−೫ರ)(೬ಯ+೫ರ). ೧೯. ೮(೫ಪ − ೭ಬ)(೫ಪ + ೭ಬ).
೨೦. ೧೬(೨ಅ−೩ಮ)(೨ಅ+೩ಮ). ೨೧. (೫ಪ − $\frac{೧}{೫}$ಭ)(೫ಪ + $\frac{೧}{೫}$ಭ).
೨೨. ($\frac{೧}{೩}$ಕ − ೬ಗ)($\frac{೧}{೩}$ಕ + ೬ಗ). ೨೩. ($\frac{೧}{೭}$ಯ − $\frac{೧}{೮}$ರ)($\frac{೧}{೭}$ಯ + $\frac{೧}{೮}$ರ).
೨೪. ($\frac{೧}{೫ಪ}$ − ೬)($\frac{೧}{೫ಪ}$ + ೬). ೨೫. ($\frac{೧}{೭}$ಪ − ೫ಮ)($\frac{೧}{೭}$ಪ + ೫ಮ).
೨೬. (ಯ − $\frac{೧}{೯}$ಮ)(ಯ + $\frac{೧}{೯}$ಮ). ೨೭. ($\frac{೧}{೪}$ಪ − $\frac{೫}{೯ಮ}$)($\frac{೧}{೪}$ಪ + $\frac{೫}{೯ಮ}$).
೨೮. ೧೦೦(೩ಕಯ − ೨ಸ)(೩ಕಯ + ೨ಸ).
೨೯. ೩(೭ಪರ−೮ಲ)(೭ಪರ+೮ಲ). ೩೦. ೬ತ^{೨}(೫ಪ−೪ಮ)(೫ಪ+೪ಮ).
೩೧. ೭ನ(೮ಯ − ೩ಲ)(೮ಯ + ೩ಲ).

(೧೨ದ^2 + ನ^2). ೨೯. ಕ(೭ಕ^2 + ೧೮ಕಗ + ೧೨ಗ^2). ೩೦. (ಯ+ರ) (೩೭ಯ^2 − ೭೩ಯರ + ೩೭ರ^2). ೩೧. (ಕ − ಗ)(ಕ^2 + ಕಗ + ಗ^2 + ೫). ೩೨. (೨ಯ−ರ)(೪ಯ^2+೨ಯರ+ರ^2+೩). ೩೩. (೩ಪ−೨ಬ)(೯ಪ^2 +೬ಪಬ+೪ಬ^2−೪). ೩೪. (೪ಯ+೩ರ)(೧೬ಯ^2−೧೨ಯರ+೯ರ^2−೧). ೩೫. ೫(ಪ+೨ಭ)(೨೫ಪ^2−೧೦ಪಭ+೪ಭ^2−೪). ೩೬. (೨ಪ+ಬ)(೪ಪ^2 −೨ಪಬ+ಬ^2+೪). ೩೭. (ಗ+ಫ+೩)(ಗ^2−ಗಫ+ಫ^2). ೩೮. (೨ಕ−ಗ−೨) (೪ಕ^2+೨ಕಗ+ಗ^2). ೩೯. (೩ಪ−೫ಬ−೩)(೯ಪ^2+೧೫ಪಬ+೨೫ಬ^2). ೪೦. (ಕ − ೨ಗ)(ಕ + ೨ಗ)(ಕ^2 + ೨ಕಗ + ೪ಗ^2)(ಕ^2 − ೨ಕಗ + ೪ಗ^2). ೪೧. (ಕ^2+ಗ^2)(ಕ^4−ಕ^{2}ಗ^2+ಗ^4). ೪೨. (ಪ^2+೪ಗ^2)(ಪ^4−೪ಪ^{2}ಗ^2 +೧೬ಗ^4). ೪೩. (೨ಯ^2 + ೩ಕ್ಷ^2)(೪ಯ^4 − ೬ಯ^{2}ಕ್ಷ^2 + ೯ಕ್ಷ^4). ೪೪. (೨ಯ^2−೫ಸ^2)(೪ಯ^4+೧೦ಯ^{2}ಸ^2+೨೫ಸ^4). ೪೫. (೩ಪ−ಮ) (೩ಪ+ಮ)(೯ಪ^2+೩ಪಮ+ಮ^2)(೯ಪ^2−೩ಪಮ+ಮ^2). ೪೬. ೬(ಅ^2 −೨ಕ)(ಅ^4+೨ಅ^{2}ಕ^2+೪ಕ^2). ೪೭. (೩ಕ^3−೪ಫ^3)(೯ಕ^6+೧೨ಕ^{3}ಫ^3 +೧೬ಫ^6). ೪೮. (೨ಯ−ರ)(೨ಯ+ರ)(೪ಯ^2+ರ^2)(೪ಯ^2+೨ಯರ +ರ^2)(೪ಯ^2−೨ಯರ+ರ^2)(೧೬ಯ^4−೪ಯ^{2}ರ^2+ರ^4). ೪೯. (೨ದ+೩ನ) (೮ದ^2−೧೨ದನ+೧೮ನ^2−೫). ೫೦. (೨ಪ+೩ಬ)(೪ಪ^2−೪ಪಬ+೯ಬ^2). ೫೧. (೩ಕ + ೪ಗ)(೯ಕ^2 − ೧೫ಕಗ + ೧೬ಗ^2). ೫೨. (೫ರ−೪ಸ)(೨೫ರ^2 +೨೦ರಸ+೧೬ಸ^2). ೫೩. (೨ಯ−೫ಕ್ಷ)(೪ಯ^2+೭ಯಕ್ಷ+೨೫ಕ್ಷ^2).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೬. **ಪು. ೧೩೯.**

೧. (೨ಯ−೩)(ಯ−೨). ೨. (೨ಯ−೧)(ಯ−೪). ೩. (೨ಯ+೫) (೩ಯ+೧). ೪. (೩ರ−೨)(೪ರ−೫). ೫. (೩ಯ−೧)(೨ಯ+೧). ೬. (೮ರ −೧)(೨ರ−೩). ೭. (೨ವ+೭)(ವ−೨). ೮. (ಕ್ಷ−೮)(ಕ್ಷ+೧). ೯. (೪ಯ +೧)(ಯ−೭). ೧೦. (೫ವ−೧)(೩ವ+೨). ೧೧. (೨ಪ − ೩)(೭ಪ + ೧). ೧೨. (೧೧ನ+೨)(೨ನ+೩). ೧೩. (೩ಸ−೨)(೬ಸ−೧). ೧೪. (೭ಮ−೩) (ಮ+೫). ೧೫. (೨ಪ + ೫)(೫ಪ − ೨). ೧೬. (೩ದ − ೨)(೪ದ + ೧). ೧೭. (೯ರ−೨)(ರ−೧). ೧೮. ೧೧(೨ಯ−೧)(ಯ−೩). ೧೯. ೨ಪ(೬ಪ+೫) (೨ಪ−೧). ೨೦. ೭ಅ(೨ಅ−೩)(೩ಅ−೨). ೨೧. ೩ಪ^2(ಪ−೫)(೩ಪ+೧).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೭. **ಪು. ೧೫೩, ೧೫೪.**

೧. (೨ಯ+೩)(ಯ+೧). ೨. (೩ಯ+೧)(ಯ+೧). ೩. (೩ರ+೨)(೨ರ+೩). ೪. (೩ವ+೧)(೨ವ+೫). ೫. (೩ಲ-೧)(೨ಲ-೧). ೬. (೨ರ-೧)(೩ರ-೫). ೭. (೪ಪ-೩)(೨ಪ-೩). ೮. (ಮ-೪)(೬ಮ-೧). ೯. (೨ರ-೩)(೩ರ+೧). ೧೦. (೨ಸ+೧)(೪ಸ-೧). ೧೧. (೫ಯ-೧)(ಯ+೨). ೧೨. (ಪ-೭)(೨ಪ+೧). ೧೩. (೨ದ-೩)(೫ದ+೧). ೧೪. (೩ಕ್ಷ-೧)(೨ಕ್ಷ-೩). ೧೫. (೨ರ-೩)(೪ರ-೩). ೧೬. (೨ಪ-೫)(೪ಪ+೧). ೧೭. (೩ಯ+೫)(ಯ+೬). ೧೮. (೩ನ-೨)(೫ನ+೧). ೧೯. (ಬ-೮)(೨ಬ+೧). ೨೦. (೬ಯ+೫)(೨ಯ+೩). ೨೧. (೩ಯ-೧)(೨ಯ+೩). ೨೨. (ಯ+೬)(೪ಯ+೭). ೨೩. (೨ಯ-೧)(೩ಯ+೧೦). ೨೪. (ಯ-೧)(೧೦ಯ-೯). ೨೫. (೨ಪ+೫)(೮ಪ+೩). ೨೬. (೨ಮ-೧)(೨ಮ+೫). ೨೭. (೮ಯ-೩)(೩ಯ-೨). ೨೮. (೧೦ರ-೧)(ರ-೯). ೨೯. (ಯ+೪)(೮ಯ-೫). ೩೦. (೪ರ-೩)(೬ರ-೫).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೮. **ಪು. ೧೫೭.**

೧. (ಯ+೨)(ಯ+೫). ೨. (ರ+೫)(ರ+೯). ೩. (ವ+೫)(ವ+೮). ೪. (ಲ+೩)(ಲ+೭). ೫. (ಸ+೫)(ಸ+೭). ೬. (ಕ್ಷ-೨)(ಕ್ಷ-೫). ೭. (ಮ-೩)(ಮ-೫). ೮. (ನ-೩)(ನ-೧೩). ೯. (ಯ-೨)(ಯ-೮). ೧೦. (ಯ-೫)(ಯ-೧೫). ೧೧. (ಯ-೮)(ಯ+೩). ೧೨. (ರ-೬)(ರ-೩). ೧೩. (ಮ-೩)(ಮ-೧೩). ೧೪. (ನ-೧೩)(ನ+೧೦). ೧೫. (ಪ-೭)(ಪ+೮). ೧೬. (ವ-೮)(ವ+೧೦). ೧೭. (ಬ-೩)(ಬ+೮). ೧೮. (ರ-೪)(ರ+೧೪). ೧೯. (ರ-೧೭)(ರ+೮). ೨೦. (ಯ-೨೫)(ಯ+೫). ೨೧. (ನ+೧೦)(ನ-೧೧). ೨೨. (ತ-೩)(ತ+೨೩). ೨೩. (ದ+೪)(ದ+೨೪). ೨೪. (ಕ+೪)(ಕ+೧೩). ೨೫. (ಅ-೧೨)(ಅ-೧೩). ೨೬. (ಗ-೨೩)(ಗ+೪). ೨೭. (ರ-೨೫)(ರ+೧೦). ೨೮. (ವ-೨೭)(ವ+೩). ೨೯. (ಪ-೧೦)(ಪ-೨೦). ೩೦. (ಮ-೧೨)(ಮ+೧೮). ೩೧. (ರ-೧೩)(ರ+೭). ೩೨. (ಯ-೫)(ಯ+೭). ೩೩. (ಸ+೧೧)(ಸ+೧೨). ೩೪. (ಯ-೧೬)(ಯ+೧೭). ೩೫. (ಯ-೨೦)(ಯ+೧೯). ೩೬. (ರ-೩೬)(ರ+೨೦). ೩೭. (ಕ್ಷ-೮)

(ಕ್ಷ-೩). ೩೮. (ಅ-೪೦)(ಅ+೩೮). ೩೯. (ಪ-೧೬)(ಪ+೫). ೪೦. (ಯ+೮)(ಯ+೨೨). ೪೧. (ಅಯ+೫)(ಅಯ+೮). ೪೨. (ಕಯ-೭)(ಕಯ-೪). ೪೩. (ಯ-೨ಕ್ಷ)(ಯ-೩ಕ್ಷ). ೪೪. (ಯ-೨ಕ್ಷ)(ಯ+೭ಕ್ಷ). ೪೫. (ಪ-೬ಬ)(ಪ+೩ಬ). ೪೬. (ಯ^{೨}+೨ಬ^{೨})(ಯ^{೨}+೩ಬ^{೨}). ೪೭. (ಯ^{೩}-೧೨ಬ^{೩})(ಯ^{೩}+೪ಬ^{೩}). ೪೮. (ಅ^{೨}ಯ^{೨}-೬ಕ^{೨})(ಅ^{೨}ಯ^{೨}+೩ಕ^{೨}). ೪೯. (ಪ^{೨}ಯ^{೩}-೪ಮ^{೨}ಕ್ಷ^{೩})(ಪ^{೨}ಯ^{೩}+೫ಮ^{೨}ಕ್ಷ^{೩}).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೯. **ಪು. ೧೬೪.**

೧. (೩ಯ - ೫)(೫ಯ + ೨). ೨. ೨(೪ರ-೩)(೪ರ+೧). ೩. ೩(ವ+೩)(೨ವ-೭). ೪. (೫ಲ-೧೧)(೨ಲ+೩). ೫. ೪(೨ಸ-೩)(೭ಸ+೩). ೬. (೧೦ಕ್ಷ-೩)(೫ಕ್ಷ+೨). ೭. (ಯ+ರ-೫)(ಯ+ರ+೭). ೮. (ಲ+ವ+೮)(ಲ+ವ-೯). ೯. (೨ರ+೨ಸ+೩)(ರ+ಸ+೫). ೧೦. (೩ಯ + ೩ಕ್ಷ + ೪)(೨ಯ + ೨ಕ್ಷ-೫). ೧೧. (೮ಯ+೮ರ-೩ಲ-೩ವ)(೨ಯ+೨ರ+ಲ+ವ). ೧೨. (೨ಪ+೨ಫ-೫ಬ -೫ಮ)(ಪ + ಫ + ೫ಬ + ೫ಮ). ೧೩. (೩ಯ - ರ - ೪ವ)(೨ಯ + ರ - ವ). ೧೪. (೨ಯ+೩ವ+ಸ)(೫ಯ+೨ವ-೩ಸ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೦. **ಪು. ೧೬೮.**

೧. ಅ. ೨. ೨ಕ^{೨}. ೩. ೪. ೪. ೪ಪ. ೫. ೧೨. ೬. ಕಯ. ೭. ಪರ^{೨}. ೮. ಗ^{೨}ಮ^{೩}. ೯. ೨ಅ. ೧೦. ೨ಅಕ. ೧೧. ೨ಅಯ^{೩}. ೧೨. ೫ಅ^{೩}ರ^{೨}. ೧೩. ೫ಅ^{೨}ಯರ^{೩}. ೧೪. ಯ^{೨}ರ^{೨}ಲ^{೨}. ೧೫. ೧೧ಯ^{೩}ರ^{೨}. ೧೬. ೨ಪ^{೨}ಬಮ^{೪}. ೧೭. ಅ^{೨}ಯರ^{೪}. ೧೮. ೪ಪ^{೨}ಬ^{೨}ಮ^{೪}. ೧೯. ೨ಪಬಮ. ೨೦. ಕ^{೨}ಗ. ೨೧. ೫ಯ^{೨}ರ^{೩}ಲ. ೨೨. ೪. ೨೩. ೪ಯ^{೨}ರ^{೨}ಲ^{೨}. ೨೪. ೯ಅ^{೨}ಕ^{೩}ಗ. ೨೫. ಕ್ಷ^{೨}. ೨೬. ೨ಅ^{೨}ಕ. ೨೭. ೨ಯ^{೩}. ೨೮. ಯ^{೨}ರ. ೨೯. ೫ಲ^{೨}ವ. ೩೦. ಯ^{೩}. ೩೧. ೭ಅ^{೨}ಯ^{೨}ರಸ^{೩}.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೧. **ಪು. ೧೭೦, ೧೭೧.**

೧. ೨(ಅ+೨ಕ). ೨. ಕ. ೩. ೨(೨ಪ - ಬ + ೩ಮ). ೪. ೩ಯರಲ. ೫. ೪(ಬ^{೨}+ಬ-೫). ೬. ೨(ಪ+ಬ+ಮ). ೭. ೩(೪ಪ-೩ಮ). ೮. ೫(೨ಅ -೩ಕ+ಗ. ೯. ೨ಯ(೨ಯ-ರ). ೧೦. ೩ಕಪ(ಕ+ಪ). ೧೧. ೨ಅ(೨ಅ-ಕ). ೧೨. ೪.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೨. **ಪು. ೧೭೪.**

೧. ಯ+೫. ೨. ಯ−೬. ೩. ಯ+೭. ೪. ಯ−೪. ೫. ೭(ಪ−ಮ). ೬. ೨ಅ+೩ಕ. ೭. ೨(ಅ−ಕ). ೮. ೨ಪ−೭ಮ. ೯. ಯ−೨ರ. ೧೦. ೨(ದ^{೨}−ದನ+ನ^{೨}). ೧೧. ರ+೮. ೧೨. ೪. ೧೩. ೨ಯ. ೧೪. ಯ^{೨}−ರ^{೨}. ೧೫. ಯ^{೨}−೨ಯರ+೪ರ^{೨}. ೧೬. (೨ಯ−೩ರ)^{೨}. ೧೭. ೩(ಯ^{೨}−೪ರ^{೨}). ೧೮. ೩ಕ್ಷ−೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೩. **ಪು. ೧೭೭.**

೧. ೮ಅಇ. ೨. ೩೦ಕಗಫ. ೩. ೪ಕ^{೨}ಗ^{೨}. ೪. ೨೪ಕ^{೪}ಪಮ^{೨}. ೫. ೨೪ಕ^{೨}ಪ^{೨}ಬಮ^{೨}. ೬. ೧೨ಕಗದ. ೭. ೨೪ಕ^{೨}ಗ^{೨}ಪಬ^{೨}. ೮. ೪೦ಗ^{೨}ದ^{೩}ಯ^{೨}ರ^{೪}. ೯. ೧೫೦ಪಯ^{೩}ರ^{೩}ಲಸ^{೨}. ೧೦. ೧೨೦ಅ^{೨}ಇಯ^{೪}ರ^{೩}ಲ^{೨}. ೧೧. ೩೦ಕ^{೫}ಗ^{೩}ಪ^{೨}ಯ^{೫}. ೧೨. ೫೬ಪ^{೨}ಬ^{೨}ಯ^{೪}ರ^{೩}. ೧೩. ೨೪ಯ^{೩}ರ^{೩}ಲ^{೨}ಸ^{೪}. ೧೪. ೧೨೦ಅ^{೩}ಇ^{೨}ಕ^{೪}ಬ^{೪}. ೧೫. ೨೪ಅಇ^{೨}ಯ^{೨}ರ^{೩}ಲ^{೩}.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೪. **ಪು. ೧೭೯-೧೮೧.**

೧. (ಯ−೭)(ಯ−೪)(ಯ+೨)(ಯ+೩). ೨. ೧೨(ಯ−೮)(ಯ−೫)(ಯ−೪)(ಯ+೭). ೩. ೨೦ಅ(ಯ+ಕ್ಷ)^{೨}(೨ಯ−ಕ್ಷ). ೪. ೧೨(ಯ−೩ರ)^{೨}(ಯ+೩ರ)(ಯ+೨ರ). ೫. ೧೨(ಯ−೪ರ)(ಯ+೫ರ)(ಯ+೬ರ). ೬. ೨೪(೨ಯ−೧)(೩ಯ−೧)(೪ಯ+೩). ೭. (೫−೨ಯ)(೩−ಯ)(೭−೩ಯ). ೮. ೧೨(೧−೪ಯ)(೨−ಯ)(೩−೫ಯ). ೯. ೩೦(೨ರ−ಸ)(೨ರ+೫ಸ)(೩ರ−೨ಸ)^{೨}. ೧೦. ೩೦(೪ರ−೧)^{೨}(೬ರ−೫)^{೨}. ೧೧. ೬(೨೫ರ^{೨}−೩೬ಲ^{೨})^{೨}. ೧೨. ೨(೧೬ಯ^{೨}−೯ಕ್ಷ^{೨})(೪ಯ^{೨}−೯ಕ್ಷ^{೨}). ೧೩. ೪(೮ಯ−ರ)(೪ಯ−ರ)(೨ಯ+ರ). ೧೪. ಪ^{೬}−೬೪ಮ^{೬}. ೧೫. ೩ಪಮ(೮ಪ^{೩}+೨೭ಮ^{೩})(೨ಪ−೩ಮ)(೪ಪ−೯ಮ). ೧೬. ೬(೨ಪ+೩ಮ)(೪ಪ−೩ಮ)(೨ಯ−೩ವ)(೪ಯ+೩ವ). ೧೭. (೮೧ಕ^{೪}−೧೬ಗ^{೪})(೪ಕ^{೨}−ಗ^{೨}). ೧೮. (೨೫ವ^{೨}−೩೬)(೩೬ವ^{೨}−೨೫). ೧೯. ೧೨(೨೫ಯ^{೨}−೪ರ^{೨})^{೨}(೨೫ಯ^{೨}−೧೬ರ^{೨}). ೨೦. ೧೨(೪ಯ^{೨}−೯ರ^{೨})(೪ಯ^{೨}−೨೫ರ^{೨}). ೨೧. (ಪ^{೪}−೧೬ಮ^{೪})(೨ಪ^{೨}+೫ಮ^{೨}). ೨೨. ೬೪ಅ^{೬} − ೭೨೯ಕ^{೩}. ೨೩. (ಯ^{೨} − ೯ವ^{೨})(೪ಯ^{೨} − ೨೫ವ^{೨}). ೨೪. ೨ಪ(೪ಪ+೯ಮ)(೭೨೯ಪ^{೩}−೬೪ಮ^{೩}). ೨೫. ೧೪(೨ಯ−೭ವ)(೨ಯ

+೫ವ)(೭ಯ−೨ವ). ೨೬. ಯ−೪; ೬(ಯ − ೪)^{೨}(ಯ − ೧೩)(ಯ+೯)
(ಯ + ೨೫). ೨೭. ೫ವ − ೩; ೧೨(೫ವ − ೩)^{೨}(೫ವ + ೩)(೯ವ^{೨} − ೨೫).
೨೮. ೯ಪ + ೭ಮ; (೯ಪ − ೭ಮ)(೭ಪ − ೯ಮ)(೭೨೯ಪ^{೩} + ೩೪೩ಮ^{೩}).
೨೯. ೪ಅ−೨೭ಕ; (೪ಅ−೨೭ಕ)^{೨}(೨ಅ−ಕ)(ಅ−೨ಕ). ೩೦. ೨ಕ(ಕ−ಗ);
೧೨ಕಗ^{೨}(೨ಕ−ಗ)(೨ಕ−೩ಗ)(೩ಕ−೨ಗ)(೩ಕ−೪ಗ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೫. **ಪು. ೧೮೬.**

೧. $\frac{ಅ^{೨}}{ಇ^{೨}}$. ೨. $\frac{೧}{೩ಕ^{೨}ಗ^{೨}}$. ೩. $\frac{೪}{ಯರ}$. ೪. $\frac{ಯ^{೨}}{೨ಅ}$. ೫. $\frac{ಪ}{೪ಮ}$.
೬. $\frac{೪ಕ^{೩}}{೫ಗ^{೨}}$. ೭. $\frac{೨ಪ}{೩ಬಮ^{೨}}$. ೮. $\frac{೨ಬ^{೨}}{೩ಪಮ}$. ೯. $\frac{೩ಬ^{೨}ಮ^{೨}}{೫ಪ^{೨}}$. ೧೦. $\frac{೨ಯರ}{೫ಲ^{೨}}$.
೧೧. $\frac{೨ಅರ^{೨}}{೧೫ಯಲ}$. ೧೨. $\frac{೬ಗ^{೨}}{೧೧ಕಫ}$. ೧೩. $\frac{೨ಅ^{೩}ಲ}{೩ಯರ^{೨}}$. ೧೪. $\frac{೧೧ಪಮ}{೧೯ಬ^{೩}}$.
೧೫. $\frac{ಅಬ}{೪ಇಪಮ}$. ೧೬. $\frac{೫ಯರ^{೨}}{೯ಅಇ}$. ೧೭. $\frac{೨ಯ^{೩}ಲ^{೨}ಸ}{೫ರ^{೨}}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೬. **ಪು. ೧೮೯, ೧೯೦.**

೧. $\frac{೧}{೩}$. ೨. $\frac{ಪ}{೩ಬ}$. ೩. $\frac{೨ಯ}{೩ರ}$. ೪. $\frac{೫ಅ}{೭ಕ}$. ೫. $\frac{ಯ+ರ}{೩(ವ+ಸ)}$. ೬. $\frac{೧}{೪ಬ}$.
೭. $\frac{೮ಪ}{೯ಬ}$. ೮. $\frac{೩ಯ+೫ರ}{೨(ಯ+೩ರ)}$. ೯. $\frac{೪}{ಪ(ಕ-ಗ)}$. ೧೦. $\frac{೧}{ಅ+೪}$. ೧೧. $\frac{೧}{೨ಕ-೭ಗ}$.
೧೨. $\frac{ಮ+೫}{ಮ+೨}$. ೧೩. $\frac{೨(೨ಪ-೩)}{೩(೨ಪ-೧)}$. ೧೪. $\frac{೧}{೯ಪ^{೨}+೨೫}$. ೧೫. $\frac{೧೨ಪ-೧೩ಮ}{೧೨ಪ-ಮ}$.
೧೬. $\frac{೧}{೨ಅ+೩ಕ}$. ೧೭. $\frac{೨ಪ}{೩ಬ(೫ಯ-೬ವ)}$. ೧೮. $\frac{೬ಯ-೭ಲ}{೬ಯ+೭ಲ}$.
೧೯. $\frac{೨ರ-೯ಸ}{೨(೨ರ+೯ಸ)}$. ೨೦. $\frac{೪ಯ+೫ಸ}{ಯ+೫ಸ}$. ೨೧. $\frac{೪ಯ+೭ರ}{೫ಯ-ರ}$. ೨೨. $\frac{೨ಪ-೯ಮ}{೧೦ಪ-೩ಮ}$.
೨೩. $\frac{೨ಯ-ರ}{೩ಯ-ರ}$. ೨೪. $\frac{೪ಯ+೯ರ}{೪ಯ-ರ}$. ೨೫. $\frac{೩ರ+೭ಸ}{೩ರ+೧೦ಸ}$. ೨೬. $\frac{೨(೨ಪ+೫ಮ)}{೫(೩ಪ-ಮ)}$.

೨೭. $\frac{೨ಅ-೭}{೩ಅ+೧}$ ೨೮. $\frac{೨(೩ಪ+೨)}{೫(೪ಪ-೧)}$. ೨೯. $\frac{ಪ(ಯ-೨ರ)}{೪ಬ(ಯ-ರ)}$ ೩೦. $\frac{ಯ+೩ರ}{೨ಯ-ರ}$

೩೧. $\frac{ಕ^2+೨ಕಪ+೪ಪ^2}{ಕ+೨ಪ}$. ೩೨. $\frac{೧೬ಬ^2-೧೨ಬಮ+೯ಮ^2}{೪ಬ(೪ಬ+೩ಮ)}$.

೩೩. $\frac{೩ತ-ನ}{೯ತ^2-೩ತನ+ನ^2}$. ೩೪. $\frac{ಯ+ಕ್ಷ}{೪ಯ+ಕ್ಷ}$. ೩೫. $\frac{ಯ-ಕ್ಷ}{ಯ+ಕ್ಷ}$.

೩೬. $\frac{೪ದ^2 - ೯ನ^2}{೪ದ^2 - ನ^2}$. ೩೭. $\frac{೮೧ಯ^4 + ೯ಯ^2ವ^2 + ವ^4}{೯ಯ^2 + ವ^2}$.

೩೮. $\frac{೧೦೦+೭೦ರ+೪೯ರ^2}{೨ಯ^2(೧೦-೭ರ)}$ ೩೯. $\frac{೬೪-೮೮ಯ+೧೨೧ಯ^2}{೩ಪ(೮+೧೧ಯ)}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೭. ಪು. ೧೯೨–೧೯೪.

೧. $\frac{ತಬಮ}{೩ನಪ}$. ೨. $\frac{ಕಗ}{ತ^2}$. $\frac{}{೨ಯರ}$. ೪. $\frac{ಅಯ}{೨ಫರ}$ .. $\frac{೫ಯ^2}{ವಸ}$

೬. ೧. ೭. ೧. ೮. $\frac{೩ಯ}{೨ಕ್ಷ}$. ೯. $\frac{ಪಮ}{ಬಯ}$. ೧೦. $\frac{೩೨ತ}{ನ}$. ೧೧. $\frac{೧೬}{ಪಬಮ}$

೧೨ ಪಬಮ. ೧೩. $\frac{೨ಕಗಘ}{ಪ^3}$. ೧೪. $\frac{೧}{೫}$ ೧೫. $\frac{(ಪ+ಬ)(ಯ^2+ಯರ+ರ^2)}{(ಯ+ರ)(ಪ^2+ಪಬ+ಬ^2)}$

೧೬. $\frac{ವ-ಸ}{ಯ-ರ}$. ೧೭. $\frac{(ಯ+ರ)(ಲ-ವ)}{(ಯ-ರ)(ಲ+ವ)}$. ೧೮. $\frac{ಘ+ಮ}{ಪ-ಬ}$. ೧೯. $\frac{ಅ-ಇ}{ಕ+ಗ}$

೨೦. $\frac{ಪ-೫ಮ}{೩ಬ+ಭ}$. ೨೧. $\frac{೮ಅ(೩ಪ+೪ಮ)}{೧೫ಇ(ಯ - ೨ರ)}$ ೨೨. $\frac{೮ಕಘ}{೧೫ಅಗ}$ ೨೩. $\frac{೩ಪ}{೨}$

೨೪. $\frac{೫ಕಪ}{೬ಇಮ}$ ೨೫. $\frac{೪ಪ}{೫ಇ(೨ಕ+೩ಗ)}$. ೨೬. $\overline{(೨ಪ-೩ಮ)(೪ಯ+೫ವ)}$

೨೭. $\frac{ಯ+೧}{ಯ+೪}$ ೨೮. $\frac{೫ಪ+೨}{೪ಪ-೯}$ ೨೯. $\frac{೪ಯ-೭ರ}{೨(೨ಯ+ರ)}$ ೩೦. $\frac{೪ಪ-೩ಮ}{೪(೭ಪ-ಮ)}$

೩೧. $\frac{ನ+೬}{ನ+೮}$. ೩೨. $\frac{೪(೨ಯ-೩)}{೫(೫ಯ-೮)}$. ೩೩. $\frac{೨(೪ಯ-೩ವ)}{೫(೫ಯ+೬ವ)}$. ೩೪. $\frac{೩ವ-೫ಸ}{೩ವ+೫ಸ}$

೩೫. $\frac{ವ^೪ + ೪ವ^೨ಮ^೨ + ೧೬ಮ^೪}{ವ^೨ - ೪ಮ^೨}$. ೩೬. ೧. ೩೭. ೩.

೩೮. $\frac{(೫ರ + ಲ)(೫ರ - ೪ಲ)}{(೫ರ + ೨ಲ)(೫ರ + ೯ಲ)}$. ೩೯. $\frac{೬ಯ - ೧}{೮ಯ + ೩}$.

೪೦. $\frac{(೨ಅ - ೫ವ)(೧೬ಅ^೪ + ಅ^೨ವ^೨ + ವ^೪)}{(೨ಅ - ವ)(೧೬ಅ^೪ + ೪ಅ^೨ವ^೨ + ವ^೪)}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೮. ಪು. ೧೯೭–೧೯೯.

೧. $\frac{ಅ^೨ರ}{೬ಇ^೨ಯ}$. ೨. $\frac{೧೧ಲ}{೮ಅರ}$. ೩. $\frac{೧೪ಬಮ}{೧೫ವಯ}$. ೪ $\frac{೫ವ}{೬ಅವ}$. ೫. $\frac{೨ಪರ}{೨೭ಅಮ}$.

೬. $\frac{೧೦ಬರ}{೯ವಯಲ^೨}$. ೭. $\frac{೪೦}{೨೭}$. ೮. $\frac{೨೫ಕ}{೧೨೮}$. ೯. $\frac{೩ಅ}{೨ಕ}$. ೧೦. $\frac{೨ಯ-೫ವ}{೩ಯ-೪ವ}$

೧೧. $\frac{ಮ(ವ - ೫ಬ)}{ವ(೪ಪ + ೫ಮ)}$. ೧೨. $\frac{೨ಯ + ರ}{೩ಯ + ೩ರ}$. ೧೩. $\frac{೩(೨ಪ+೩ರ)}{೨}$

೧೪. $\frac{(ಯ + ೪ಲ)(ಯ^೨ + ೩ಯಲ + ೯ಲ^೨)}{(ಯ + ೩ಲ)(ಯ^೨ + ೪ಯಲ + ೧೬ಲ^೨)}$. ೧೫. $\frac{೨(ಪ+೮ಮ)}{ಪ-೩ಮ}$

೧೬. $\frac{(೪ಯ-೩)(೨ಯ-೧)}{(೪ಯ-೫)(೨ಯ+೧)}$. ೧೭. $\frac{೭ಪ-೧}{೪(೨ಪ+೩)}$. ೧೮. $\frac{೫ಅ}{೩ಯ^೨-೪ವ^೨}$

೧೯. $\frac{೧}{೩೨}$. ೨೦ $\frac{೪ಪ^೨+೧೦ಪಮ+೨೫ಮ^೨}{೪ಪ+ಮ}$. ೨೧. $\frac{೪ಯ-ರ}{೨ಯ+ರ}$. ೨೨. $\frac{ಅ+೧}{ಅ-೪}$.

೨೩. $\frac{೩ನವ}{೨ಗಮ}$. ೨೪. $\frac{೨(ರ-೪)}{ರ+೧}$. ೨೫. $\frac{೨ಮ-೩}{೨ಮ+೩}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೯. ಪು. ೨೦೨, ೨೦೩.

೧. $\frac{೨೫ಯ}{೪೦}, \frac{೬ರ}{೪೦}$. ೨. $\frac{೧೬ಯ}{೩೬}, \frac{೨೭ಯ}{೩೬}$. ೩. $\frac{೬ರ}{೧೫}, \frac{೨೦ರ}{೧೫}$. ೪. $\frac{೪೦ರ}{೪೫}, \frac{೧೨ಸ}{೪೫}$. ೫. $\frac{೨೪ಲ}{೪೨}, \frac{೩೫ವ}{೪೨}$. ೬. $\frac{೯ಯ}{೧೨}, \frac{೧೦ರ}{೧೨}, \frac{೮ವ}{೧೨}$. ೭. $\frac{೧೨ಅ}{೩೦}, \frac{೯ಇ}{೩೦}, \frac{೮ಕ}{೩೦}$. ೮. $\frac{೫೪ಪ}{೬೦}, \frac{೨೧ಬ}{೬೦}, \frac{೫೦ಮ}{೬೦}$. ೯. $\frac{೩೦ತ}{೧೦೫}, \frac{೨೦ದ}{೧೦೫}, \frac{೫೬ನ}{೧೦೫}$. ೧೦. $\frac{೨ಮಯ}{ಪಮ}$,

$\frac{೭ಪವ}{ಪಮ}$. ೧೧. $\frac{೮ಮಯ}{೨ಫಮ}, \frac{೩ಫವ}{೨ಫಮ}$. ೧೨. $\frac{೧೬ಬಯ}{೬ಪಬ}, \frac{೫ಪಯ}{೬ಪಬ}$. ೧೩. $\frac{೨೦ಕಪ}{೧೫ಅಕ}$, $\frac{೯ಅಮ}{೧೫ಅಕ}$. ೧೪. $\frac{೬ಗಬ}{೨೧ಕಗ}, \frac{೫ಕಮ}{೨೦ಕಗ}$. ೧೫. $\frac{೪ಕಬಮ}{ಪಬಮ}, \frac{೫ಗಪಮ}{ಪಬಮ}, \frac{೭ಫಪಬ}{ಪಬಮ}$.

೧೬. $\frac{೧೨ಪಯ}{೪ಪಬಮ}, \frac{೩೨ಬರ}{೪ಪಬಮ}, \frac{೯ಬಮಲ}{೪ಪಬಮ}$. ೧೭. $\frac{೧೩೫ಬಮಯ}{೬೦ಪಬಮ}, \frac{೧೮ಪಮರ}{೬೦ಪಬಮ}$, $\frac{೮೦ಪಬಲ}{೬೦ಪಬಮ}$. ೧೮. $\frac{೪೦ಅಪ}{೬೦ಪಬಮ}, \frac{೪೫ಕಬ}{೬೦ಪಬಮ}, \frac{೪೮ಗಮ}{೬೦ಪಬಮ}$. ೧೯. $\frac{ಯ-೧}{ಯ^{೨}-೧}$, $\frac{ಯ+೧}{ಯ^{೨}-೧}$. ೨೦. $\frac{೪(ರ-೪)}{ರ^{೨}-೧೬}, \frac{೬(ರ+೪)}{ರ^{೨}-೧೫}$. ೨೧. $\frac{೮(ಯ+೫)}{(ಯ+೫)^{೨}}, \frac{೩}{(ಯ+೫)^{೨}}$.

೨೨. $\frac{೭(ಯ-ರ)}{ಯ^{೨}-ರ^{೨}}, \frac{೧೦}{ಯ^{೨}-ರ^{೨}}$. ೨೩. $\frac{ಕ(ಯ-ರ)}{(ಯ+ರ)^{೨}(ಯ-ರ)}$, $\frac{೩ಕ(ಯ+ರ)}{(ಯ+ರ)^{೨}(ಯ-ರ)}$. ೨೪. $\frac{೫ಪ(ಯ+ವ)}{(ಯ-ವ)^{೨}(ಯ+ವ)}, \frac{೬ಪ^{೨}(ಯ-ವ)}{(ಯ-ವ)^{೨}(ಯ+ವ)}$.

೨೫. $\frac{ಅ(೫ಯ-೭ಲ)}{೨೫ಯ^{೨}-೪೯ಲ^{೨}}, \frac{೩ಅ}{೨೫ಯ^{೨}-೪೯ಲ^{೨}}$.

೨೬. $\frac{೪ಅ(೩ಪ+ಮ)(೩ಪ^{೨}+೩ಪಮ+ಮ^{೨})}{(೨೭ಪ^{೩}-ಮ^{೩})(೩ಪ+ಮ)}, \frac{೨ಅ^{೨}(೩ಪ^{೨}+೩ಪಮ+ಮ^{೨})}{(೨೭ಪ^{೩}-ಮ^{೩})(೩ಪ+ಮ)}$, $\frac{೮ಅ^{೩}(೩ಪ+ಮ)}{(೨೭ಪ^{೩}-ಮ^{೩})(೩ಪ+ಮ)}$. ೨೭. $\frac{೮ಕ(೮ಪ^{೩}+೧೨೫ಮ^{೩})}{(೨ಪ+೫ಮ)(೮ಪ^{೩}+೧೨೫ಮ^{೩})}$, $\frac{೪ಕ^{೨}(೪ಪ^{೨}-೧೦ಪಮ+೨೫ಮ^{೨})}{(೨ಪ+೫ಮ)(೮ಪ^{೩}+೧೨೫ಮ^{೩})}, \frac{೩ಕ^{೩}(೨ಪ+೫ಮ)}{(೨ಪ+೫ಮ)(೮ಪ^{೩}+೧೨೫ಮ^{೩})}$.

೨೮. $\frac{೪(ಯ+೩)}{(ಯ+೩)(ಯ+೪)(ಯ+೫)}, \frac{೫(ಯ+೫)}{(ಯ+೩)(ಯ+೪)(ಯ+೫)}$.

೨೯. $\frac{೯ಯ(ಯ-೪)}{೬(ಯ-೨)(ಯ+೩)(ಯ-೪)}, \frac{೪ಯ(ಯ-೨)}{(ಯ-೨)(ಯ+೩)(ಯ-೪)}$, $\frac{ಅಯ(ಯ+೩)}{(ಯ-೨)(ಯ+೩)(ಯ-೪)}$. ೩೦. $\frac{೨ಯ^{೨}(೪ಯ-೭ವ)}{(೨ಯ-೫ವ)(೧೬ಯ^{೨}-೪೯ವ^{೨})}$, $\frac{೩ಯವ(೨ಯ-೫ವ)}{(೨ಯ-೫ವ)(೧೬ಯ^{೨}-೪೯ವ^{೨})}, \frac{ವ^{೨}(೪ಯ+೭ವ)}{(೨ಯ-೫ವ)(೧೬ಯ^{೨}-೪೯ವ^{೨})}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦. ಪು. ೨೦೭, ೨೦೮.

೧. $\frac{\text{೫ಪ}}{\text{೧೨}}$. ೨. $\frac{\text{೪೭ಪ}}{\text{೪೫}}$. ೩. $\frac{\text{೧೭ಯ}}{\text{೧೨}}$. ೪. $\frac{\text{ರ}}{\text{೨೪}}$. ೫. $\frac{\text{೫ರ}}{\text{೪೨}}$. ೬. $\frac{\text{೭ಯ}}{\text{೬}}$.

೭. $\frac{\text{೩೧ರ}}{\text{೨೪}}$. ೮. $\frac{\text{೩೭ವ}}{\text{೩೬}}$. ೯. $\frac{\text{೩ಯ}}{\text{೪}}$. ೧೦. $\frac{\text{೧೩ಪ}}{\text{೪೫}}$. ೧೧. $\frac{\text{೨೦}}{\text{೩ಪ}}$. ೧೨. $\frac{\text{೧೩}}{\text{೧೨ಪ}}$.

೧೩. $\frac{\text{೧೧}}{\text{೪ಪ}}$. ೧೪. $\frac{\text{೨೪ಕಮ}+\text{೪ಗಪ}+\text{೯ಫಬ}}{\text{೧೨ಪಬಮ}}$. ೧೫. $\frac{\text{ಯ}^{\text{೩}}-\text{ರ}^{\text{೩}}+\text{ಲ}^{\text{೩}}}{\text{ಯರಲ}}$.

೧೬. $\frac{\text{೮ಮ}^{\text{೨}}-\text{೯ಪ}^{\text{೨}}-\text{೫ಬ}^{\text{೨}}}{\text{೬ಪಬಮ}}$. ೧೭. $\frac{\text{ಪ}^{\text{೨}}+\text{೨ಪಮ}+\text{ಮ}^{\text{೨}}}{\text{೨ಪ}^{\text{೨}}\text{ಮ}^{\text{೨}}}$.

೧೮. $\frac{\text{೪ಕ}^{\text{೨}}-\text{೧೨ಕಗ}+\text{೯ಗ}^{\text{೨}}}{\text{೧೨ಕ}^{\text{೨}}\text{ಗ}^{\text{೨}}}$. ೧೯. $\frac{\text{೨ಗ}}{\text{ಕ}^{\text{೨}}-\text{ಗ}^{\text{೨}}}$. ೨೦. $\frac{\text{೮ಕ}}{\text{ಕ}^{\text{೨}}-\text{ಗ}^{\text{೨}}}$.

೨೧. $\frac{\text{೪೪ಯ}-\text{೨೫ವ}}{\text{೧೨}}$. ೨೨. $\frac{\text{೧೬ಪ}-\text{೧೯}}{\text{೬}}$. ೨೩. $\frac{\text{೯ಯ}+\text{೨೯}}{\text{೧೫}}$. ೨೪. $\frac{\text{೫೪ವ}-\text{೬೫}}{\text{೨೪}}$.

೨೫. $\frac{\text{೫೬ಯ}+\text{೩ರ}}{\text{೪೦}}$. ೨೬. $\frac{\text{೫}(\text{ಕ}^{\text{೨}}+\text{ಗ}^{\text{೨}})}{\text{ಕ}^{\text{೨}}-\text{ಗ}^{\text{೨}}}$. ೨೭. $\frac{\text{ಯ}+\text{೩ಕ್ಷ}}{\text{೬}}$. ೨೮. $\frac{\text{೩ಯ}+\text{ವ}}{\text{೧೦ಮ}}$.

೨೯. $\frac{\text{೨}(\text{ಕ}^{\text{೨}}+\text{ಗ}^{\text{೨}})}{\text{ಕಗಫ}}$. ೩೦. $\frac{\text{೭}(\text{ಕ್ಷ}+\text{೧})}{(\text{ಕ್ಷ}-\text{೨})(\text{ಕ್ಷ}+\text{೫})}$. ೩೧. $\frac{\text{೫೪}}{\text{ಪ}^{\text{೨}}-\text{೯}}$.

೩೨. $\frac{\text{ಯ}-\text{೧೯}}{(\text{ಯ}-\text{೩})(\text{ಯ}-\text{೫})}$. ೩೩. $\frac{\text{೪}}{\text{ರ}+\text{೨}}$. ೩೪. $\frac{\text{೬}}{\text{ವ}-\text{೩}}$

$\frac{\text{೩}}{(\text{ಯ}+\text{೩})(\text{ಯ}+\text{೬})}$. ೩೬. $\frac{\text{ಯ}}{\text{ಯ}^{\text{೨}}-\text{೨೫}}$. ೩೭. $\frac{\text{ಮ}}{\text{ಮ}^{\text{೨}}-\text{೧೪೪}}$

೩೮. $\frac{\text{ಯ}^{\text{೨}}+\text{೧೯ಯ}+\text{೧೦}}{(\text{೩ಯ}+\text{೨})(\text{೫ಯ}+\text{೨})}$. ೩೯. $\frac{\text{೧}}{\text{೨}(\text{೪ಸ}-\text{೩ವ})}$.

೪೦. $\frac{\text{೧}}{(\text{ಯ}-\text{೫})(\text{೨ಯ}+\text{೫})(\text{೩ಯ}+\text{೧})}$. ೪೧. $\frac{\text{೯ನ}^{\text{೨}}+\text{೯ನ}-\text{೧೧}}{(\text{೩ನ}-\text{೪})(\text{೩ನ}+\text{೧})}$

೪೨. $\frac{\text{೨ಪ}^{\text{೨}}-\text{೧೫ಪ}-\text{೨೫}}{\text{೨ಪ}^{\text{೨}}(\text{೪ಪ}^{\text{೨}}-\text{೨೫})}$.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೧. ಪು. ೨೧೩-೨೧೫.

೧. $\frac{೪}{೯}$. ೨. $\frac{೧೬}{೩೦}$. ೩. $\frac{೫}{೮}$. ೪. $\frac{೯}{೩೫}$. ೫. $\frac{೧೫}{೧೯}$. ೬. ೯ವ.; ೩೯ವ. ೭. ೩೬ವ.; ೪೦ವ. ೮. ೧೨ವ.; ೩೬ವ. ೯. ೧೧ವ.; ೩೭ವ.; ೪೧ವ. ೧೦. ೫೦ವ.; ೫೫ವ. ೧೧. ೮ ಶೇರು; ೨೦ ಶೇರು. ೧೨. ೨॥ ರೂ.; ೩ ರೂ. ೧೩. ೨೨೫; ೩೦೦. ೧೪. ೪೦೦೦೦ ರೂ.; ೫೦೦೦೦ ರೂ. ೧೫. ೪೦ ಬಿಳಿ; ೬೦ ಕೆಂಪು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೨. ಪು. ೨೨೦-೨೨೨.

೧. ೧೦೦ ಮೈ. ೨. ೧೨೦ ಮೈ. ೩. ೧೦ ಶೇರು; ೧೩॥ ಆ. ೪. ೧೮ ಇಂ., ೧೦ ಇಂ. ೫. ೨೦ ಜನರು; ೧೨ ದಿನಗಳು. ೬. ೨೮ ಸಾಲುಗಳು; ೧೩೫ ಪುಟಗಳು. ೭. ೧೬॥ ಮೈಲು. ೮. ೩೦೦ ಹುಡುಗರು; ೪ ಆ. ೯. ೩೬ ವಾರು; ೨೦ ವಾರು. ೧೦. ೬೦೦೦೦ ರೂ.; ೩$\frac{೧}{೩}$%. ೧೧. ೪; ೮. ೧೨. ೨; ೮. ೧೩. ೩; ೨. ೧೪. ೨; ೧. ೧೫. $\frac{೩}{೪}$; $\frac{೧}{೩}$. ೧೬. ೩; ೨. ೧೭. ೩; ೫. ೧೮. ೧೦; ೧.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧ನೆಯದು. ಪು. ೨೨೩.

೧. ೩೦ ಮೈ.; ೪೦ ಮೈ. ೨. ೩; ೨, ೧. ೩. ಪ=(೨+π)ತ; ೧೬$\frac{೧}{೩}$ ಇಂ. ೪. (೭ಯ+೩)(೨ಯ-೯); (೪ಯ+೪ರ-೮)(೪ಯ-೬ರ+೮); (೫ರ-೭ಸ)(೨೫ರ^{೨}+೩೫ರಸ+೪೯ಸ^{೨}). ೫. ೨ಪ-೭; (೨ಪ-೭)^{೨}(೨ಪ+೭)(೩ಪ+೭).
೬. $\frac{೧೬}{(೨ಯ-೭)(೨ಯ-೫)}$. ೭. ೨೦; ೧೨ ರೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ನೆಯದು. ಪು. ೨೨೩.

೧. ೨೧೬. ೨. ೩; ೫, -೧೪. ೩. ಬ=೫ಮ; ೨೪೦೦೦; ೧೯೮, ೧೯೯, ೨೦೦, ೨೦೧, ೨೦೨. ೪. (೪ಯ-೩)(೨ಯ+೭); (೪ಯ-೫ರ)(೪ಯ-೫ರ+೩); (೨ರ-೩ಸ)(೪ರ^{೨}+೯ಸ^{೨}). ೫. ಕ-೫ಗ; (ಕ^{೪}-೬೨೫ಗ^{೪})(ಕ^{೨}+೫ಕಗ+೨೫ಗ^{೨}). ೬. $\frac{೪(ಪ-ಬ)}{(ಪ+ಬ)(ಪ^{೨}+ಬ^{೨})}$. ೭. $\frac{೫}{೭}$.

ಪತ್ರಿಕೆ ೩ನೆಯದು. ಪು. ೨೨೪.

೧. ೯; ೫. ೨. ೩; ೨, ೧. ೩. ಕ್ಷ=೨ಎ(ಉ+ಅ); ೨೫೨೦ ಚೌ. ಫೂ.

೪. $(೨ಯ+೩ರ)(೮ಯ-೩ರ)$; $(೨ಪ+೩ಬ)(೨ಪ-೩ಬ)^{೨}$; $(ಕ-೧)(ಕ+೧)(೫ಕ-೭)(೫ಕ+೭)$. ೬. $\frac{೫}{ಸ-೮}$. ೭. ೧೨; ೪|| ರೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೪ನೆಯದು. **ಪು. ೨೨೫.**

೧. $\frac{೩}{೭}$. ೨. $\frac{೨}{೩}$; ೧, $-\frac{೧}{೩}$. ೩. $ಅ=\frac{೩ಕ}{೨ಎ}-ಉ$; ೧೦ ಫೂ. ೪. $(೭ಯ-೮ರ)(ಯ-೨ರ+೫)$; $(೯ರ-\frac{೧}{೯}ಲ)(೮೧ರ^{೨}+ರಲ+\frac{೧}{೮೧}ಲ^{೨})$; $(೩ದ-೪ನ)(೩ದ+೪ನ)(೯ದ^{೨}+೧೬ನ^{೨})$. ೬. $\frac{೨}{ಯ}$. ೭. ೫ ರತ್ತಲು; ೮ ರತ್ತಲು.

ಪತ್ರಿಕೆ ೫ನೆಯದು. **ಪು. ೨೨೬.**

೧. ೧೨೮; ೭೨. ೨. ೪; ೫; ೮. ೩. $(ಅ-೪)(ಉ-೪)$ ಚೌ. ಫೂ.; $ಕ(ಅ-೪)(ಉ-೪)$ ರೂ.; ೧೨೦ ಚೌ. ಫೂ.; ೩೬೦ ರೂ. ೪. $೨(ಪ-೧೫)(ಪ-೩೬)$; $(೨ಕ-೫ಗ+೬ಘ)(೨ಕ-೫ಗ-೬ಘ)$; $(೫ಬ-೭ಮ)(ಬಮ+೧)$. ೫. ೨; ೩೬ $(೪ಬ^{೨}-೨೫ಮ^{೨})^{೨}$. ೬. $\frac{೨೪೮ನ-೩೫ದ}{೪೦}$. ೭. ೧೪೦ ಚೌ. ಫೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೬ನೆಯದು. **ಪು. ೨೨೭.**

೧. ೫ವ.; ೨೭ವ. ೨. ೨; ೩, −೨. ೩. $ಪ=ಸ+(ವ-೧)ಬ$; ೯೬ ರೂ. ೪. $೩(೨ಕ-೧)(೮ಕ-೩)$; $(೪ಯ-೫ಕ್ಷ)(೪ಯ-೬ವ+೫ಕ್ಷ)$; $೨(೩ಯ-೨)(೪ಯ+೧೧)$. ೫. $೨ಯ-೫ವ$; $೧೨(೨ಯ-೫ವ)^{೨}(೨ಯ+೫ವ)(೨ಯ+೩ವ)$. ೬. $\frac{೨(೭ಅ+೩)}{ಅ(ಅ+೧)}$. ೭. ೨೫ ವಾರು, ೩೬ ವಾರು; ೩೦ ವಾರು, ೩೦ ವಾರು; ೨೦ ವಾರು, ೪೫ ವಾರು.

ಪತ್ರಿಕೆ ೭ನೆಯದು. **ಪು. ೨೨೮.**

೧. ೬೦೦; ೧೮೦; ೪೦. ೨. ೪; ೨, −೧. ೩. $ವ=\frac{ಪ-ಸ}{ಬ}+೧$; ೧೨ನೆಯ ವರ್ಷ. ೪. $(ಯ-ವ)(ಯ+ವ-ಗ)$; $೪(೨ಪ-ಬ)(೭ಪ-೩ಬ)$; $(೩ಪ-\frac{೧}{೩}ಮ)^{೩}$. ೫. $೪(ಪ-೨ಬ)$; $೪೮(೨ಪ-ಬ)(ಪ^{೨}-೪ಬ^{೨})(ಪ^{೨}+೨ಪಬ+೪ಬ^{೨})$. ೬. $\frac{೬}{ಪ-ಮ}$. ೭. ೫೧೨.

ಪತ್ರಿಕೆ ೮ನೆಯದು. ಪು. ೨೨೯.

೧. ೧೧೫ ಮೈ. ೨. ೩; ೪, ೨. ೩. ಸ=$\frac{ಖ–೪೮೦}{೫೨}$; ೩೨. ೪. ೫(೩ಯ–೨)(೫ಯ+೮); (೩ಪ–೫ಬ)(೯ಪ^{೨}+೨೫ಬ^{೨}); (೨ಪ^{೨}+೩ಪಬ+೫ಬ^{೨})(೨ಪ^{೨}–೩ಪಬ+೫ಬ^{೨}). ೫. ೩ಪ–೪ಮ; ೬(೩ಪ+೪ಮ)(೩ಪ–೪ಮ)^{೨}(೯ಪ^{೨}+೧೨ಪಮ+೧೬ಮ^{೨}). ೬. $\frac{(ಯ+೧)(೨ಯ+೧)}{(ಯ–೧)(೨ಯ–೧)}$. ೭. ೪೨.

ಪತ್ರಿಕೆ ೯ನೆಯದು. ಪು. ೨೩೦.

೧. ೧೩೨೦ ಚೌ. ವಾರು. ೨. –೬; ೨, ೧. ೩. ೨೪·೬೪ ಚೌ. ಫೂ.; ತ=$\sqrt{\frac{ಪ}{೪\pi}}$; ೩$\frac{೧}{೨}$ ಇಂ. ೪. ೪(೨ಯ–೫)(೩ಯ+೧೧); (ಪ–೮ಬ)(ಪ+೮ಬ–೭ಅ); (೪ಮ^{೨}+ಮ+$\frac{೧}{೪}$)(೪ಮ^{೨}–ಮ+$\frac{೧}{೪}$). ೫. ೨೮ಯ^{೨}–೯೦ಯರ+೭೫ರ^{೨}. ೬. $\frac{೧}{೨ಕ+೧}$. ೭. ೩೦೦೦ ರೂ.; ೭೦೦೦ ರೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧೦ನೆಯದು. ಪು. ೨೩೧.

೧. ೫೦೦ ರೂ.; ೬೦೦ ರೂ. ೨. ೨; ೩, ೨. ೩. ಕ್ಷ=೨ಉ^{೨}+೪ಉಎ; ೪೬೪ ಚೌ. ಇಂ. ೪. (೭ಯ+೯ರ)^{೨}; (ಕ+೧)(ಗ–೫); ೭(೨ಯ–೩)(೩ಯ+೨). ೫. ೩(ನ–೨); ೩೬ (೧೧ನ+೧೩)(ನ–೨)(ನ^{೨}–೨೫). ೬. $\frac{೧}{ಪ+ಲ}$. ೭. ೭೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧೧ನೆಯದು. ಪು. ೨೩೨.

೧. ೨೨, ೨೩, ೨೪. ೨. ೪; –೧, ೨. ೩. ಎ=$\frac{ಕ್ಷ–೨ಉ^{೨}}{೪ಉ}$; ೭. ಇಂ. ೪. (೪ರ+೭ಸ)^{೩}; (೪ಪ–೯ಮ)(೨ಪ+೩ಮ+೫); (೬ಕ–೫ಗ–೨)(೬ಕ–೫ಗ+೧). ೫. ತ+೮ನ; ೧೫(೨ತ–ನ)(ತ–೮ನ)(ತ+೮ನ)^{೨}. ೬. $\frac{೧೬}{(ಯ^{೨}–೪)^{೨}}$. ೭. ೩೦೦ ರೂ.; ೬೦೦ ರೂ.; ೯೦೦ ರೂ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧೨ ನೆಯದು. **ಪೃ. ೨೩೩.**

೧. ೫೪೦. ೨. ೪; ೨, ೩. ೩. ಭ=$\frac{ಬ+೪}{೨}$; ೧೦. ೪. (ಪ+೨)(೩೭ಪ^{೨}−೨೦ಪ+೪); (೨ಯ−೧)(೨ಯ+೧)(ಯ−೨)(ಯ+೨); ೪(೩ನ+೧)(೬ನ−೫). ೫. ೨ಪ−೧; ೨ಪ(೨ಪ−೧)^{೩}(೫೦ಪ+೨೩)(೪ಪ^{೨}+೨ಪ+೧). ೬. ಪ^{೨}−೨ಪ−೧೫; ಪ^{೨}−೭ಪ+೧೨. ೭. ೩೦೦ ರೂ.; ೩೪೦ ರೂ.; ೩೬೦ ರೂ.